Monika Jonczak
Elżbieta Ostaficzuk
Grażyna Śleszyńska
Mazowieckie Samorządowe Centrum Doskonalenia Nauczycieli

Sprawdzian umiejętności matematycznych uczniów – narzędziem diagnozy dyspozycji nauczyciela xxi wieku?

A. Rodin, *Myśliciel,*
fot. E. Ostaficzuk

W ostatnim dziesięcioleciu, a szczególnie od 2007 roku, większość krajów wprowadziła poprawki do swoich programów nauczania matematyki, skupiając się bardziej na kompetencjach i umiejętnościach, które należy uzyskać, niż na treściach programowych[1].

Analiza pięciu obszarów kompetencji – opanowanie podstawowych umiejętności i procedur, znajomość pojęć i reguł matematycznych, stosowanie matematyki w realnych sytuacjach, komunikatywny język matematyki oraz rozumowanie matematyczne – wykazała, że rzadko zaleca się szczegółowe metody nauczania i oceniania tych umiejętności, mimo że wszystkie z nich są wymieniane w programach nauczania poszczególnych krajów[2].

Ogólnie rzecz biorąc, konieczna jest równowaga między metodami promującymi przyswajanie wiedzy matematycznej przez uczniów oraz rozwojem ich umiejętności matematycznych. Przede wszystkim można jeszcze silniej wspierać takie podejście do nauczania, które promuje aktywne uczenie się, krytyczne myślenie i umiejętność stosowania przez uczniów wiedzy teoretycznej w realnych sytuacjach. Wielokrotnie potwierdziło się, że takie metody wywierają korzystny wpływ na poziom osiągnięć, ale i na nastawienie uczniów do matematyki[3].

Umiejętność stosowania wiedzy teoretycznej w realnych sytuacjach…

…testowano wśród uczniów klas drugich ponadgimnazjalnych na Mazowszu wiosną 2013 roku w badaniach diagnostycznych projektu Połowa drogi…

[1] *Nauczanie matematyki w Europie: ogólne wyzwania i strategie krajowe,* Fundacja Rozwoju Systemu Edukacji FRSE, Warszawa 2012, s. 143.

[2] Ibidem, s.143.

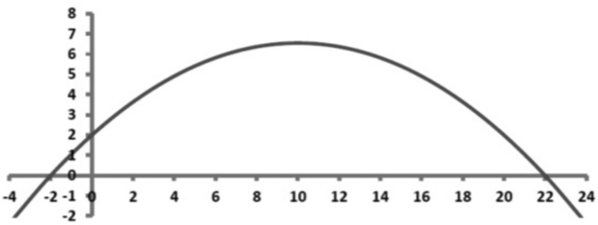
[3] Ibidem, s. 144.

Motywem przewodnim sprawdzianów Matematyka do potęgi P oraz Matematyka do potęgi R (to znaczy na poziomie podstawowym lub rozszerzonym) były XXX Igrzyska Olimpijskie w Londynie w 2012 roku. Jednym z zadań było zadanie z akcentem patriotycznym, związane ze zdobyciem przez Tomasza Majewskiego złotego medalu w konkurencji pchnięcia kulą. W teście na poziomie rozszerzonym zadaniem ucznia było odkryć kształt wykresu – toru lotu kuli, uczniowie z poziomu podstawowego taki wykres otrzymali w poleceniu. Zadaniem obu grup było wyznaczenie wzoru funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$, której fragment wykresu ilustruje tor lotu kuli pchniętej przez Tomasza Majewskiego. W tabeli 1 zawarte są sugestie, jak rozwiązać zadanie oraz jak poprowadzić ucznia, który sobie z zadaniem nie poradził.

Tabela 1. Planowanie rozwoju ucznia – komentarze dydaktyczne ułatwiające wskazywanie uczniom kierunku rozwoju indywidualnego

Zadanie

Tomasz Majewski zdobył na XXX IO złoty medal. Pchnął kulę dłonią znajdującą się nieco powyżej ramienia, na wysokości 2 m. Kula, lecąc po torze w kształcie paraboli, w odległości 10 m od zawodnika wzniosła się najwyżej. Tym pchnięciem Tomasz Majewski wyrzucił kulę na odległość 21,89 m, najdalej spośród olimpijskich finalistów. Parabolę, której fragment stanowi tor lotu kuli, przedstawiono na rys. 3.



Rysunek 3. Parabola, której fragment przedstawia tor lotu kuli pchniętej przez Tomasza Majewskiego

Wyznacz wzór funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$, której fragment wykresu ilustruje tor lotu kuli pchniętej przez Tomasza Majewskiego. W rozważaniach przyjmij odległość 21,89 m z dokładnością do 1 m.

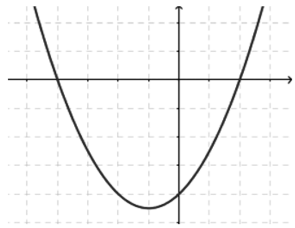
Wiedza i umiejętności potrzebne do rozwiązania zadania:

1. Przeanalizuj sytuację opisaną w zadaniu, znajdź model matematyczny dla tej sytuacji.
2. Podstawowe pojęcia:

- wykres funkcji kwadratowej
- wzory opisujące funkcję kwadratową
- znaczenie współczynników występujących we wzorach
- zależności między wzorami funkcji i kształtem paraboli
- wzory Viete’a.

Jeśli miałeś kłopot z rozwiązaniem zadania, spróbuj rozwiązać zadania pomocnicze:

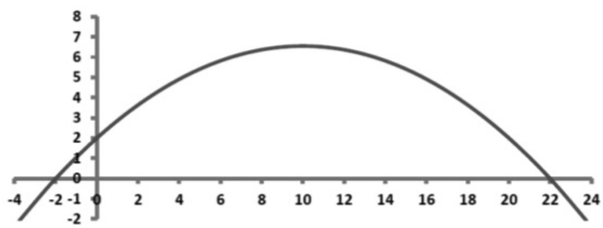
- Naszkicuj wykres funkcji kwadratowej, wiedząc, że jej miejscami zerowymi są $x_1 = -3$, $x_2 = 3$ oraz że $y_w = -5$. Napisz wzór tej funkcji w postaci $y = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- Naszkicuj wykres funkcji kwadratowej, korzystając tylko z jej wzorów: $y = 1{,}5 \cdot (x + 1) \cdot (x - 3)$ oraz $y = 1{,}5 \cdot (x - 1)^2 - 6$.
- Wykorzystując informacje z wykresu, napisz wzór funkcji w postaci $y = a \cdot (x - x_1)(x - x_2)$ oraz $y = a \cdot (x - x_w)^2 + y_w$.



- Ułóż podobne zadania, wykorzystując własności współczynników we wzorach funkcji kwadratowej.

Różne sposoby rozwiązania zadania – wybrane modele, strategie

1. Wykorzystanie postaci ogólnej, iloczynowej oraz wzoru na x_w funkcji kwadratowej



Wykres funkcji $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ przechodzi przez punkty (-2, 0) oraz (22, 0) i (0, 2), czyli: $2 = a \cdot (0 + 2) \cdot (0 - 22)$, stąd $a = -\frac{1}{22}$.

Dla funkcji $y = -\frac{1}{22}x^2 + bx + 2$ $(c = 2)$ mamy:

$$x_w = 10 = \frac{-b}{2 \cdot \left(-\frac{1}{22}\right)}, \qquad \text{czyli} \qquad b = \frac{10}{11}.$$

Wzór funkcji, której wykresem jest podana parabola: $y = -\frac{1}{22}x^2 + \frac{10}{11}x + 2$.

2. Wykorzystanie postaci iloczynowej funkcji kwadratowej i rozwiązanie układu równań:
   - Wykres funkcji $y = ax^2 + bx + c$ przechodzi przez punkty (-2, 0), (22, 0) i (0, 2), czyli c = 2 oraz:

$$\begin{cases} 0 = 4a - 2b + 2 / \cdot (11) \\ 0 = 22 \cdot 22a + 22b + 2 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} 0 = 2 \cdot 22a - 22b + 22 \\ 0 = 22 \cdot 22a + 22b + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = 22(22+2)a + 24 \\ b = 2a + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -\frac{24}{22 \cdot 24} = -\frac{1}{22} \\ b = -\frac{1}{11} + 1 = \frac{10}{11} \end{cases}$$

   - Wzór funkcji, której wykresem jest podana parabola: $y = -\frac{1}{22}x^2 + \frac{10}{11}x + 2$.

3. Wykorzystanie postaci kanonicznej oraz wzoru na x_w funkcji kwadratowej
   - Dla funkcji $y = a \cdot (x - x_w)^2 + y_w$. mamy $w_x = 10$ oraz punkty (-2, 0) i (0, 2) należą do wykresu, więc:

$$\begin{cases} 0 = a(-2-10)^2 + y_w \\ 2 = a(0-10)^2 + y_w \end{cases}$$

$$-\begin{cases} 0 = 144a + y_w \\ 2 = 100a + y_w \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -\frac{2}{44} = -\frac{1}{22} \\ y_w = -144 \cdot \left(-\frac{1}{22}\right) = \frac{72}{11} \end{cases}$$

   - $x_w = \frac{-b}{2a}$ (*a*, *b* – współczynniki we wzorze $y = ax^2 + bx + c$,

gdzie $c = 2$ (na wykresie mamy punkt (0, 2)), czyli: $x_w = 10 = \frac{-b}{2 \cdot \left(-\frac{1}{22}\right)}$,

więc b = 10⁄11.
   - Wzór funkcji, której wykresem jest podana parabola: $y = -\frac{1}{22}x^2 + \frac{10}{11}x + 2$.

4. Wykorzystanie wzorów Viete'a
- Dla funkcji opisanej wzorem = $ax^2 + bx + c$, której miejscami zerowymi są $x_1 = -2$ oraz $x_2 = 22$ i której wykres przechodzi przez punkt (0, 2), mamy:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases} \qquad \begin{cases} -2 + 22 = \dfrac{-b}{a} \\ -2 \cdot 22 = \dfrac{2}{a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -\dfrac{1}{22} \\ b = -20a \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -\dfrac{1}{22} \\ b = \dfrac{10}{11} \end{cases}$$

- Wzór funkcji, której wykresem jest podana parabola: $y = -\frac{1}{22}x^2 + \frac{10}{11}x + 2$.

Zadanie opisujące pchnięcie kulą okazało się dla uczniów umiarkowanie trudne. Nauczycieli sprowokowało do wielu komentarzy, które w tabeli 2 ilustrują reprezentatywne fragmenty przesłanych opinii.

Tabela 2. Komentarze nauczycieli wyrażające opinie na temat treści zadania o pchnięciu kulą

Fragment zadania	Komentarz nauczyciela matematyki
Kula, lecąc po torze w kształcie paraboli, w odległości 10 m od zawodnika wzniosła się najwyżej.	Zdanie to nieprecyzyjnie określa tor lotu kuli, bo: *1) zawodnik w czasie lotu kuli nie jest nieruchomy, a jego położenie w chwili, gdy kula osiąga najwyższą wysokość, jest nam nieznane* *2) nawet gdyby przyjąć, że zawodnik po wyrzuceniu kuli jest nieruchomy, nie wynika z tego zadania, jak jest mierzona odległość od kuli do zawodnika – czy od środka kuli do końca dłoni, która wyrzuci*ła kulę, czy na przykład od środka kuli do środka ciężkości zawodnika, czy też może, jak się przyjmuje w matematyce, chodzi o odległość pomiędzy punktem kuli a pun*ktem zawodnika znajdującym się możliwie najbliżej*
	Niepoprawne rozumienie pojęcia odległości pomiędzy figurami: *poprawne oznacza bowiem odległość między punktami, a nie odległość poziomą* (czyli „po ziemi" – przyp. autorek)

Refleksje

Wiosną 2013 roku badania diagnostyczne ukazały, że *stosowanie wiedzy w realnej sytuacji* było bardziej zrozumiałe dla uczniów niż dla nauczycieli.

Może zatem ocenianie orientujące rekomendowane w projekcie ***Połowa drogi**…* do wskazywania uczniom indywidualnego kierunku rozwoju należy wzbogacić o komentarze wskazujące nauczycielom kierunek zmian?

Może… *Największa słabość w obecnym kształceniu nauczycieli tkwi w obciążeniu teorią, przy braku szeroko rozgałęzionych propozycji działania*[4].

Matematyka na wyższych etapach nauczania najwyraźniej dystansuje się od zagadnień problemowych i w ten sposób w projekcie ***Połowa drogi**…*, realizowanym w szkołach ponadgimnazjalnych, nowe perspektywy badawcze sięgają obecnie aż po horyzont.

[4] R. Miller, *Jak przeżyć w szkole. Poradnik dla nauczycieli i wychowawców,* wyd. WAM, Kraków 2012, s. 24.