Elżbieta Ostaficzuk
Grażyna Śleszyńska
Mazowieckie Samorządowe Centrum Doskonalenia Nauczycieli

Diagnoza umiejętności matematycznych - drogowskaz do indywidualnego rozwoju uczniów

Prosiaczek podszedł trochę bliżej, by zobaczyć, co Kłapouchy robi.
Przed nim, na ziemi, leżały trzy patyki, w które Kłapouchy się wpatrywał. Dwa z nich stykały się ze sobą w jednym końcu, a rozchodziły w drugim, a trzeci patyk leżał w poprzek na tamtych.[…]
- Czy wiesz, co to jest?
- Nie - rzekł Prosiaczek.
- To jest A.
- O - rzekł Prosiaczek.
- Nie O, tylko A - skarcił go Kłapouchy surowo. […] Otóż A oznacza Naukę, oznacza Wykształcenie…"[1]

Nowa podstawa programowa z matematyki już… w szkole ponadgimnazjalnej

Początek XXI wieku przyniósł zjawisko bezprecedensowego wzrostu aspiracji edukacyjnych młodych Polaków[2].

[…] Ponieważ celem reformy programowej jest poprawa efektów kształcenia, forma podstawy programowej również jest temu podporządkowana: wiadomości oraz umiejętności, które uczniowie mają zdobyć na kolejnych etapach kształcenia, wyrażone są w języku wymagań. Wyodrębniono także, w postaci wymagań ogólnych, podstawowe cele kształcenia dla każdego przedmiotu nauczania. Wskazują one na umiejętności wysokiego poziomu (np. rozumowanie w naukach ścisłych i przyrodniczych), których kształtowanie jest najważniejszym zadaniem każdego nauczyciela[3].

Wymagania ogólne to synteza, na wyższym poziomie ogólności, najważniejszych celów kształcenia.

W przypadku gimnazjum i liceum (dla zakresu podstawowego i dla zakresu rozszerzonego) wyróżniono 5 wymagań ogólnych:

- Wykorzystanie i tworzenie informacji.
- Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.

[1] A.A. Milne, *Chatka Puchatka.* Nasza Księgarnia, 2008, s. 79.

[2] Z. Marciniak, *O potrzebie reformy programowej kształcenia ogólnego* [w:] *Reforma programowa z komentarzami, t. 6. Edukacja matematyczna i techniczna.* MEN, 2009, s. 7.

[3] *Ibidem,* s. 10.

- Modelowanie matematyczne.
- Użycie i tworzenie strategii.
- Rozumowanie i argumentacja.

Normalnie wszyscy nauczyciele interesują się głównie wymaganiami szczegółowymi; wymagania ogólne są traktowane jedynie jako pewien dodatek, dodatek ważny, ale wiele osób nie uważa tego za coś istotnego[4].

Podsumowując, kształcenie wyłącznie biegłości posługiwania się narzędziami matematycznymi - wykonywanie obliczeń czy pamiętanie wzorów coraz bardziej podlega erozji. Cenniejsza dla wykształconego współczesnego człowieka jest umiejętność myślenia matematycznego - powinna być zatem kształcona już od edukacji wczesnoszkolnej.

Myślenie matematyczne

> *- Trzeba to sobie powiedzieć, żeśmy trochę zbłądzili - odezwał się Królik. Cała trójka przycupnęła w małym Piaszczystym Dołku na skraju Lasu. Ten Dołek trochę już zmęczył Puchatka, który zaczynał podejrzewać, że jest to taki dołek, który chodzi za nimi krok w krok. Bo gdzie tylko szli, zawsze w niego wpadali* […]
> *- A co by było - rzekł Puchatek powoli - gdybyśmy spróbowali znaleźć nasz Dołek, jak tylko stracimy go z oczu?*
> *- A co nam z tego przyjdzie? - spytał Królik.*
> *- Bo my ciągle szukamy Domu i nie możemy go znaleźć, więc pomyślałem sobie, że jeżeli zaczniemy szukać Dołka, to wtedy na pewno go nie znajdziemy. I to jest dobra myśl, bo może wtedy znajdziemy coś, czego wcale nie szukamy, i to może będzie właśnie to, czego naprawdę szukamy* [5].

Dynamiczny proces myślenia matematycznego[6] zawiera fazy:

- konkretyzacji,
- uogólnienia,
- wysuwania hipotezy,
- uzasadnienia,
- próby rozszerzenia klasy rozważanych przypadków, czyli stworzenia nowego problemu.

W szkole ponadgimnazjalnej na matematyce najciekawsze są konteksty problemowe. W ten sposób umiejętność myślenia matematycznego można sprawdzić wyższymi standardami wymagań ogólnych (III - modelowanie, IV - strategia, V - dowodzenie).

---

[4] *Ibidem,* s. 55.

[5] A.A. Milne, *Chatka Puchatka, op. cit.* s. 107-108.

[6] J. Mason, L. Burton, K. Stacey, *Myślenie matematyczne,* WSiP, 2005.

ZADANIE[7] (Standard III)

Na płaszczyźnie zaznaczono n punktów, z których dowolne trzy nie są współliniowe. Następnie połączono te punkty odcinkami. Ile jest punktów, jeśli wyznaczyły one 15 odcinków?

MODELOWANIE:

n punktów, z których dowolne trzy nie są współliniowe

→

nie zdarzy się, że pewien odcinek będzie leżał na innym odcinku.

KONKRETYZACJA i od razu UOGÓLNIANIE

Spróbujmy punkty uporządkować. Ponumerujmy je: 1; 2; 3; 4;…, n.

- Dla punktu z numerem 1 możemy wykreślić odcinki do wszystkich pozostałych punktów, czyli mamy (n-1) odcinków.
- Dla punktu z numerem 2 nie ma sensu kreślić odcinka do punktu z numerem 1, bo ten już istnieje. Więc kreślimy w wyobraźni odcinki do pozostałych punktów, czyli w tym przypadku mamy (n-2) nowych odcinków.
- …
- Wreszcie punkt o numerze (n-1) łączymy z ostatnim punktem o numerze n, otrzymując w ten sposób tylko 1 nowy odcinek.

WNIOSKOWANIE - ARGUMENTOWANIE

Punkty o numerach	**1**	**2**	**3**	**…**	**n-3**	**n-2**	**n-1**	**n**
Liczba odcinków rysowanych z tych punktów	**n-1**	**n-2**	**n-3**	…	3	2	1	0

Liczba narysowanych odcinków równa się sumie:

$$(n-1) + (n-2) + (n-3) + \ldots + 3 + 2 + 1 =$$

Analizując zapisy, wnioskujemy, że suma, która posiada (n - 1) składników, wynosi $\frac{n.(n-1)}{2}$.

HIPOTEZA

Dla *n* punktów (spełniających założenie zadania) otrzymujemy $\frac{n.(n-1)}{2}$ odcinków.

*Proponujemy **dowód** indukcyjny:*

Sprawdzamy, że twierdzenie jest prawdziwe dla n = 2

dla 2 punktów otrzymamy $\frac{2.(2-1)}{2} = 1$ odcinek.

Założenie indukcyjne:

dla n punktów - otrzymamy $\frac{n.(n-1)}{2}$ odcinków.

[7] M. Kurczab, E. Kurczab, E. Świda, *Zbiór zadań dla liceów i techników. Matematyka. Zakres podstawowy. Klasa 2.* Oficyna Wydawnicza KRZYSZTOF PAZDRO, 2009, zad. 10, s. 58.

Teza indukcyjna:

dla (n+1) punktów - otrzymamy $\frac{(n+1)\cdot(n+1-1)}{2} = \frac{(n+1)\cdot n}{2}$ *odcinków.*

DOWÓD indukcyjny:

„Dokładając" do n punktów jeszcze jeden punkt, powodujemy dorysowanie jeszcze n odcinków (każdy z poprzednich punków musimy połączyć odcinkiem z punktem dorysowanym), czyli otrzymamy

$$\frac{n\cdot(n-1)}{2} + n = \frac{n^2 - n + 2n}{2} = \frac{(n+1)n}{2} \text{ odcinków.}$$

Na mocy zasady indukcji matematycznej twierdzenie jest więc prawdziwe dla każdej liczby punktów.

Odpowiedź dozadania: $15 = \frac{n\,(n-1)}{2}$, *to n = 6 punktów.*

CZY MOŻNA ZADANIE ROZSZERZYĆ
- SFORMUŁOWAĆ INNE PYTANIA?

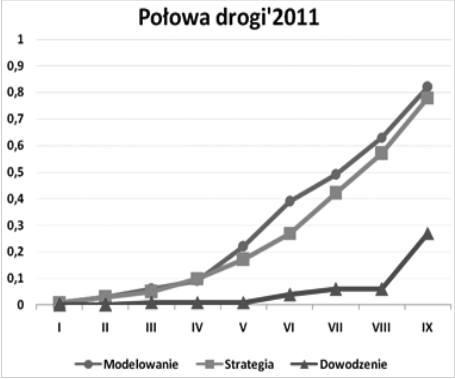
Pytanie: *ile powstanie odcinków* to inaczej pytanie: *ile jest różnych par punktów,* czyli generuje się seria pytań o ***nieuporządkowane pary:***

- ile może być uścisków dłoni na pewnej imprezie;
- ile partii rozegrano w turnieju, na którym każdy grał z każdym tylko jeden raz.

Diagnoza osiągnięć matematycznych uczniów mazowieckich szkół ponadgimnazjalnych

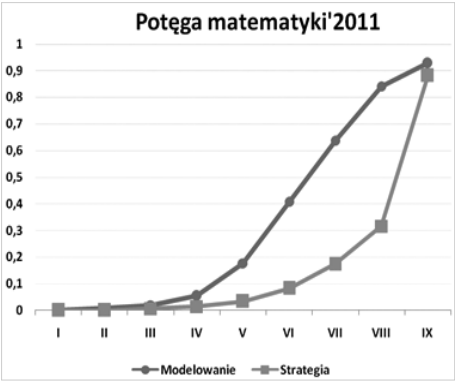
Umiejętności matematyczne w kontekstach problemowych są, między innymi, umiejętnościami badanymi w projekcie edukacyjnym ***Połowa drogi***.

Na rysunkach 1-4 przedstawiono rozwój umiejętności myślenia matematycznego uczniów mazowieckich szkół ponadgimnazjalnych badanych na IV etapie edukacyjnym dwukrotnie: na początku nauki w I klasie - sprawdzianem *Potęga matematyki*, a następnie w połowie nauki w szkole ponadgimnazjalnej, w II klasie - sprawdzianem *Połowa drogi* (w 2011 r.) lub (od 2012 r.) jednym ze sprawdzianów: *Matematyka do potęgi P* (na poziomie podstawowym) albo *Matematyka do potęgi R* (na poziomie rozszerzonym). Rozwój umiejętności myślenia matematycznego jest zilustrowany za pomocą łamanej pokazującej wzrost łatwości kompetencji wraz ze wzrostem poziomu wyniku ogólnego przedstawionego na osi jako kolejne staniny.



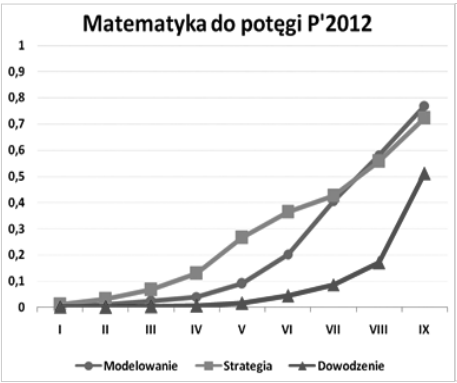
Rysunek 1. Diagnoza umiejętności myślenia matematycznego na podstawie wyników sprawdzianu *Połowa drogi'2011* **(11 036 uczniów klas drugich). Źródło: opracowanie własne.**

Na podstawie wykresu wyłania się obraz przyszłych maturzystów, którzy na półmetku nauki w szkole ponadgimnazjalnej nie opanowali umiejętności dowodzenia prostych zależności, a wymagania III (modelowanie) i IV (strategia) na dostatecznym poziomie opanowało mniej niż połowa uczniów.

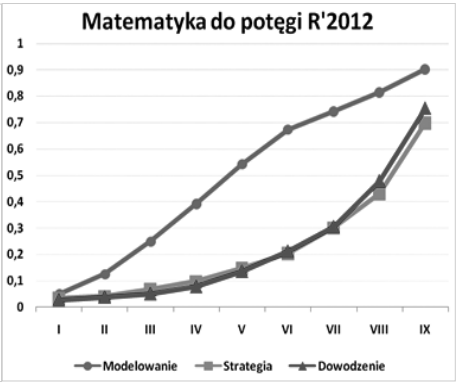


Rysunek 2. Diagnoza umiejętności myślenia matematycznego na podstawie wyników sprawdzianu *Potęga matematyki'2011* **(13 000 uczniów klas pierwszych). Źródło: opracowanie własne.**

Korzystniej prezentowały się wyniki kolejnego rocznika gimnazjalistów rozpoczynających naukę w szkołach ponadgimnazjalnych.



Rysunek 3. Diagnoza umiejętności myślenia matematycznego na podstawie wyników sprawdzianu *Matematyka do potęgi P'2012* **(8 010 uczniów klas drugich na poziomie podstawowym).**



Rysunek 4. Diagnoza umiejętności myślenia matematycznego na podstawie wyników sprawdzianu *Matematyka do potęgi R'2012* **(2 985 uczniów klas drugich na poziomie rozszerzonym).**

Źródło: opracowanie własne.

Wieloaspektowa analiza wyników sprawdzianów, choćby tylko z okresu ostatnich dwóch lat, wskazuje na wysoce niezadowalający poziom wyższych umiejętności matematycznych uczniów szkół ponadgimnazjalnych.

Słabe strony polskich maturzystów w tym zakresie są również doskonale widoczne i budzą powszechne emocje, zwłaszcza po wprowadzeniu, po 27 latach przerwy, obowiązkowej matury z matematyki. *Zadania wymagające rozumowania i argumentacji potrafi rozwiązać mniej niż 10% maturzystów* [8].

Nowy system nadzoru pedagogicznego obliguje dyrektorów i nauczycieli do autorefleksji i analizy własnych działań. Proponujemy nauczycielom autoewaluację, […] *która odpowiednio poprowadzona, daje odpowiedź na dwa zasadnicze pytania:* ***gdzie jesteśmy i w jakim kierunku iść, aby się dalej rozwijać*** [9].

Podstawowym obowiązkiem nie tylko nauczyciela i wychowawcy, ale też każdego odpowiedzialnego człowieka jest bycie wiarygodnym przewodnikiem uczniów i udzielanie im pomocy […][10].

Głównym czynnikiem wpływającym na jakość edukacji jest to, co dzieje się między mistrzem i uczniem, na każdym etapie edukacyjnym […], *od zagadnień abstrakcyjnych, po zajęcia praktyczne. Niczym nie da się zastąpić wartości, jaką jest kontakt ucznia z nauczycielem* […][11].

[8] *Raport o stanie edukacji 2010,* IBE, Warszawa 2011, s. 155 i nast.

[9] www.npseo.pl/action/internalevaluation

[10] Oświadczenie Ministra Edukacji Narodowej Krystyny Szumilas z 22.03.2012 r. www.men.gov.pl

[11] *Raport o stanie edukacji 2010,* IBE, Warszawa 2011, s. 125 i nast.

Ocenianie orientujące - relacje nauczyciel-uczeń

Projekt ***Połowa drogi*** wpisał się w założenia nowego rodzaju oceniania - zwanego orientującym. Dzięki takiemu ocenianiu istnieje możliwość powiązania okresowego przeglądu osiągnięć uczniów z obserwacją pracy i rozwoju każdego ucznia.

Nauczyciel, badając umiejętności uczniów, nie koncentruje się tylko na ocenie (sumującej), ale staje się mentorem - pomaga uczniowi ocenić stopień opanowania wiedzy z danego zakresu, wspólnie z uczniem ustala przyczyny niepowodzeń oraz wskazuje zadania i treści, które pomogą uzupełnić braki, a nawet osiągnąć wyższy stopień wtajemniczenia. Taką „orientację na sukces" proponujemy wspierać odpowiednio przygotowanymi komentarzami dydaktycznymi. Koncepcję kreowania komentarzy dydaktycznych przedstawiono na rys. 5.

Rysunek 5. Interaktywny system wskazywania kierunku rozwoju ucznia. Źródło: Materiały XVII Konferencji PTDE - opracowanie własne.

Idea samoregulacji uczenia się matematyki - nauczyciel jako wspierający autorytet i motywator

> *Wszystkie konie są jednej maści*[12]
> *Węgierski matematyk George Pólya (1887-1985) posłużył się dowodem indukcyjnym, by wykazać, że wszystkie konie są jednej maści. Dla przypadku n=1 (jednego konia) sprawa jest prosta - koń może mieć tylko jedno ubarwienie - swoje własne. Teraz załóżmy, że teoria jest prawdą dla n=m koni. Mamy zbiór liczący m koni, wszystkie są tej samej maści (1, 2, 3, …m). Istniej drugi zbiór (m+1) koni (1, 2, 3, …m+1). Zabieramy jednego konia z drugiego zbioru, więc teraz zawiera on (2, 3, …m+1). Obydwa zbiory mają wspólną część. Drugi zbiór jest zbiorem m koni, o którym wiemy, że jest zbiorem koni tej samej maści. Posługując się zasadą indukcji, możemy kontynuować rozumowanie dla wszystkich następnych koni, zatem wszystkie konie są jednej maści.*

Interaktywny system wskazywania kierunku rozwoju indywidualnego ucznia zaowocował ideą samoregulacji uczenia się matematyki, w którym to procesie nauczyciel występuje jako wspierający autorytet i motywator.

[12] A. Rooney, *Fascynująca matematyka*, wyd. BELLONA, Warszawa 2011, s. 288.

Dyskusję naukową: uczeń (potrzebujący pomocy) - nauczyciel (mentor) prezentujemy na przykładzie zadania wymagającego wiedzy z geometrii (pola figur, podobieństwo) oraz umiejętności wykonywania obliczeń procentowych.

Tabela. 1. Komentarz dydaktyczny, wskazujący kierunek rozwoju ucznia. Źródło: opracowanie własne.

ZADANIA ćwiczące umiejętności podstawowe

- Ile razy wzrośnie pole kwadratu o boku a, jeśli długość jego boku zwiększymy dwukrotnie (wykonaj rysunek)?
- Ile razy wzrośnie pole kwadratu o boku a, jeśli długość jego boku zwiększymy o 100%?
- Ile razy wzrośnie pole kwadratu o boku a, jeśli długość jego boku zwiększymy o 50%?
- Ile razy wzrośnie pole kwadratu o boku a, jeżeli długość boku tego kwadratu powiększymy o 20%?
- Rozwiąż podobne zadania, zamieniając słowa „kwadrat" na „trójkąt równoboczny".
- Rozwiąż podobne zadania, zamieniając słowa „kwadrat" na dowolny „wielokąt foremny".
- Ile razy wzrośnie pole prostokąta o bokach a oraz b, jeśli długości jego boków zwiększymy dwukrotnie (wykonaj rysunek)?

↑

CO POWINIENEŚ UMIEĆ

1. Przeczytaj uważnie treść zadania i wyobraź sobie opisaną sytuację.
2. Podstawowe pojęcia - trójkąt, trójkąt równoboczny, pole trójkąta, procent, zmniejszyć/zwiększyć o… procent.
3. Co to znaczy - figurę zmniejszono?
4. Czy znasz takie przekształcenie, które zachowuje kształt i proporcjonalnie zmniejsza wszystkie wymiary figury?
5. Jak nazywamy takie dwie figury - małą i dużą?
6. Jeśli już przypomniałeś sobie własności figur podobnych, to zapisz, czemu jest równy stosunek pól takich figur.

↑

ZADANIE

Trójkąt równoboczny zmniejszono w ten sposób, że powstał nowy trójkąt równoboczny o polu mniejszym o 36%. O ile procent zmniejszyły się boki trójkąta?

↓

ZADANIA ROZWIJAJĄCE

1. Przedyskutuj rozwiązania zadań:

a) O ile zwiększyło się pole kwadratu o boku *a*, jeżeli długość boku tego kwadratu powiększono dwukrotnie?

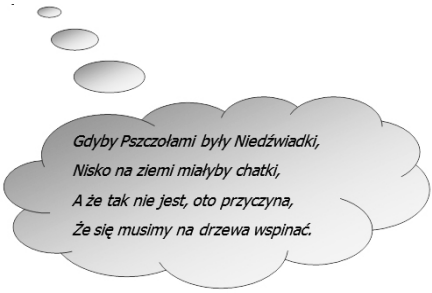
a. a^2 b. $2a^2$ c. $3a^2$ d. $4a^2$

b) Ile razy wzrośnie pole kwadratu o boku *a*, jeżeli długość jego boku powiększymy dwukrotnie?

c) O ile procent zwiększyło się pole kwadratu o boku *a*, jeżeli długość boku tego kwadratu powiększono dwukrotnie?

2. Trójkąt równoboczny A'B'C' jest podobny do trójkąta ABC w skali 1 : 5. Jakim procentem pola trójkąta ABC jest pole trójkąta A'B'C'?
3. Uzasadnij, że powiększając długość każdego boku figury f o p%, zwiększamy pole tej figury $\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$ razy.

Myślenie zawsze łączy się z cierpieniem i przyjemnością; cierpieniem wywołanym niezrozumieniem oraz przyjemnością, jaką daje olśnienie i przekonywające argumenty[13].



14

[13] J. Mason, L. Burton, K. Stacey, *Myślenie matematyczne,* WSiP, 2005, s. 125.14 A.A. Milne, *Kubuś Puchatek*. Nasza Księgarnia, 2008, s. 12.

[14] A.A. Milne, Kubuś Puchatek. Nasza Księgarnia, 2008, s. 12.