Elżbieta Ostaficzuk, Grażyna Śleszyńska
Mazowieckie Samorządowe Centrum Doskonalenia Nauczycieli

Za trudne, ale ciekawe, chociaż banalne

…mówię prozą, nie mając o tym żywego pojęcia!
Moliere, *Mieszczanin szlachcicem*

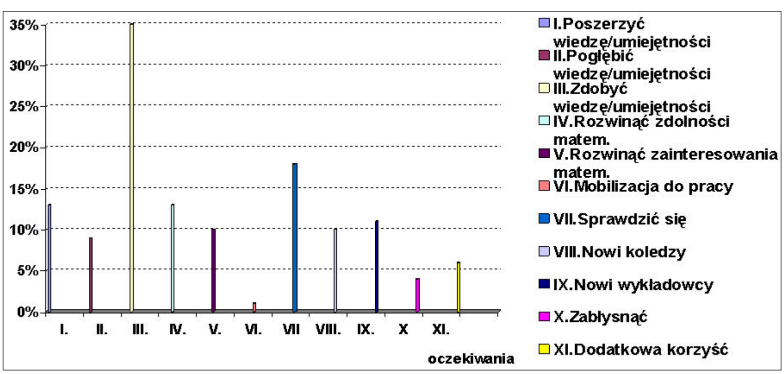
Program wspierania uzdolnionych uczniów, wprowadzony przez Samorząd Województwa Mazowieckiego i realizowany przez Mazowieckie Samorządowe Centrum Doskonalenia Nauczycieli jako projekt ***Mazowieckie Talenty,*** to szansa rozwoju dla uczniów, gdyż działania swe koncentruje na:

- wyszukiwaniu uczniów uzdolnionych w zakresie nauk ścisłych, organizowaniu dla nich wsparcia merytorycznego i psychologicznego oraz promowaniu ich osiągnięć;
- rozwijaniu zdolności kierunkowych uczniów;
- zachęcaniu do weryfikacji i zaprezentowania swojej wiedzy i umiejętności podczas prezentacji własnych opracowań oraz w konkursach i olimpiadach.

Uczniowie klas trzecich (w Radomiu – również pierwszych i drugich) z mazowieckich gimnazjów, zainteresowani uczestnictwem w projekcie ***Mazowieckie Talenty*** w sobotę, 31 maja 2008 wzięli udział w teście matematycznym.

Zainteresowania matematyczne i nadzieje edukacyjne mazowieckich piętnastolatków

Po dziewięćdziesięciominutowch emocjach spowodowanych rozwiązywaniem zadań uczestnicy testu matematycznego wyrażali swe marzenia związane z zajęciami w ramach projektu ***Mazowieckie Talenty***. Zebrano wypowiedzi stu osiemdziesięciu uczestników z Ostrołęki, Płocka, Radomia i Siedlec.



Rys. 1. Oczekiwania uczestników testu matematycznego *2008* względem projektu *Mazowieckie Talenty*

Wiedza matematyczna, argumentacja i rozumowanie– mocne czy słabe strony edukacji szkolnej

Testem matematycznym, przeprowadzonym 31 maja 2008, sprawdzano umiejętności rozumowania na podstawie treści nauczania matematyki z zakresu szkoły podstawowej i gimnazjum. Za poprawne rozwiązanie wszystkich zadań testu można było otrzymać maksymalnie 20 punktów. Test składał się z 9 zadań sprawdzających kompetencje:

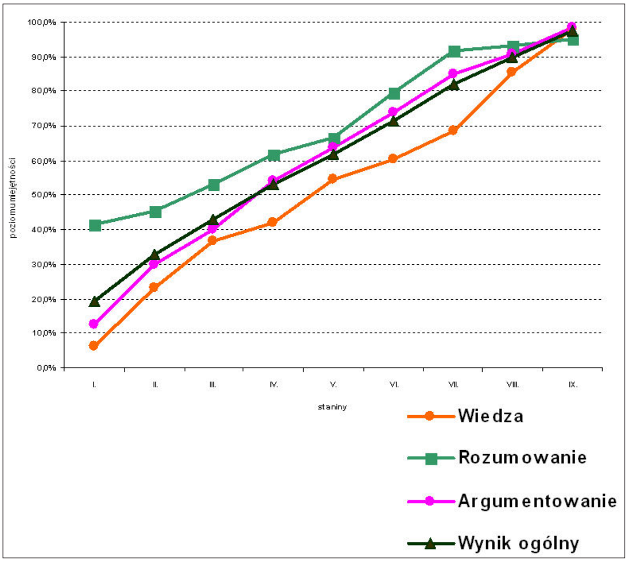
1. **Wiedzę matematyczną**, do której należało się odwołać, rozwiązując zadanie, obejmującą czynności typowo techniczne:
- obliczanie;
- konstruowanie;
- przekształcanie (arytmetyczne, algebraiczne, geometryczne);
- układanie i rozwiązywanie równań, nierówności oraz ich układów;
- sporządzanie zestawień, wykresów, diagramów;
- zapisywanie zależności językiem matematyki;
- wykorzystanie i przetwarzanie informacji danych w różnych formach.

2. **Argumentowanie**, polegające na wyjaśnieniu lub uzasadnieniu rozwiązania:
- tworzenie logicznego ciągu wniosków,
- wyjaśnianie zauważonych prawidłowości.

3. **Rozumowanie**, w którym wymagane było bardziej całościowe spojrzenie na problem przedstawiony w zadaniu i jednocześnie dobranie pod tym kątem określonych procedur rozwikłania problemu. Rozumowanie uznano w projekcie ***Mazowieckie Talenty*** za jeden z istotniejszych wskaźników zdolności matematycznych. Predyspozycje matematyczne z zakresu rozumowania obejmują umiejętności:
- pomysłowość,
- błyskotliwość,
- prostotę rozumowania,
- oryginalność, na przykład odkrywanie nowej struktury logicznej.

Tabela 1. Struktura testu *Mazowieckie Talenty 2008*

Kompetencje matematyczne	Osiągnięcia
W – Wiedza matematyczna	30%
A – Argumentowanie	40%
R – Rozumowanie	30%
Maksymalnie 20 punktów	100%



Rys. 2. Umiejętności matematyczne na podstawie wyników testu *Mazowieckie Talenty 2008* – 279 uczestników

Opinie uczestników na temat testu matematycznego

Po dziewięćdziesięciominutowch emocjach przy rozwiązywaniu zadań uczestnicy wyrażali również swe opinie na temat zadań testowych.

Tabela 2. Najczęściej pojawiające się opinie uczestników na temat zadań testu matematycznego *Mazowieckie Talenty 2008*

Ocena testu	Liczba wypo-wiedzi	Argumentacja
Trudny	20%	*Za trudne, ale ciekawe, chociaż banalne.* *Wymagał więcej logicznego myślenia niż matematyki.* *Miałam możliwość sprawdzenia się w zadaniach, które były niecodzienne i dawały do myślenia.* *Wszystkiego nie miałam w szkole i nie wiedziałam, jak zrobić większość zadań.* *Test uświadomił mi, czego jeszcze muszę się douczyć.* *Ciekawe przeżycie. Mogłem sprawdzić zdobytą wiedzę w praktyce.*
Dość trudny	19%	*Bardzo dużo zadań na myślenie; mało takich typowo matematycznych.* *Na większość zadań wiem, jak udzielić odpowiedzi, jednak nie udało mi się ich rozwiązać.* *Sprawdzał logiczne myślenie; jednak możliwy do wypełnienia.* *Zadania wymagały racjonalnego myślenia i mądrych uzasadnień. Były ciekawe, różniły się od tych, które rozwiązujemy w szkole.*
Nie był bardzo trudny	3%	*Choć i prosty też nie był.* *Wymagał logicznego myślenia i dostrzeżenia pewnych zależności.* *Sprawdzał wiedzę, ale także inteligencję i umiejętność logicznego myślenia.*

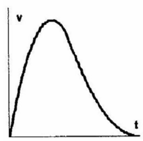
Nie był trudny	10%	*Test na myślenie. Nad niektórymi zadaniami trzeba było się wysilać.* *Chociaż wpaść na rozwiązania nie było łatwo.* *Sprawdzał logiczne myślenie, a nie wiedzę.* *Trzeba było tylko uważnie przeczytać zadanie. Zadania bardzo ciekawe.*
Ogólnie średni	13%	*Było kilka pytań na logikę.* *Zadania przydatne w życiu codziennym.* *Większość zadań była łatwa, ale zrobiły się trudne.*
Raczej łatwy	3%	*Na pozór łatwy, ale wiele zadań wymagało logicznego myślenia.*
Bardzo ciekawy	9%	*Gdyż na pierwszym miejscu postawiono zdolności logicznego myślenia i wykorzystanie tego w praktyce.* *Ciekawe zadania w moim ulubionym stylu. Więcej logiki niż książkowej wiedzy.* *Zadania pomysłowe.* *Zadania inne od tych rozwiązywanych w szkole. Wymagały logicznego i matematycznego myślenia.*
Oryginalny	17%	*Na logiczne myślenie. Wymagał mniej znajomości wzorów i praw.* *Świetny! Wymagał wytężenia mózgu, wykazania się inteligencją, nie tylko czystym liczeniem.* *Został starannie przygotowany dla najzdolniejszych uczniów.* *Były zadania, z którymi wcześniej nie miałem styczności.* *Czuję się napełniona zadaniami! Test w większym stopniu na logiczne myślenie.* *Trochę dziwny; pierwszy raz się z takim spotkałem.*
Konstrukcja zadań i testu wzbudzała emocje	6%	*Test wymagał logicznego myślenia. Był ciekawy. Myślę, że dobrze sprawdzał umiejętności matematyczne.* *Zadania sformułowane jasno, o optymalnym poziomie trudności, wymagały wielorakich matematycznych umiejętności, a także jasnego rozumowania.* *Ilość czasu była zdecydowanie wystarczająca do jego napisania i sprawdzenia obliczeń.* *Spodziewałam się innej formy.* *Powinno być w teście trochę więcej liczenia.* *Wrażenie dobre. Zadania średnio trudne. Zadawalający, choć ręka boli od pisania.* *Spodziewałam się, że będzie więcej zadań na logikę, a nie tylko opisowe; że będą do rozwiązania czyste równania. Niestety treść zadań mnie rozczarowała. Spodziewałam się trudniejszych i innego typu.* *W niektórych zadaniach jest za mało miejsca na rozwiązanie i nie jest podkreślone, czy jest wymagana odpowiedź.* *Niektóre zadania były tak napisane, że nie dało się znaleźć wszystkich danych.* *Dziwny, bez sensu, nie mogący sprawdzić prawdziwych umiejętności.* *Był łatwiejszy dla chłopaków. Jako osoba, która umie więcej niż inne (teoretycznie) zweryfikowałam to myślenie.* *Uważam, że zadania nie odzwierciedlają wyników moich umiejętności.* *Test traktowałam jako zabawę. Więc nie bałam się, nie boję się i nie będę się bać!*

Logiczne myślenie jest wyróżnikiem – w opiniach testowanych uczniów – zarówno zadań *trudnych, dość trudnych…*, jak i *raczej łatwych* i *ciekawych*; po prostu **logiczne myślenie** jest dominującą cechą przeprowadzonego testu matematycznego. Analiza wypowiedzi na temat konstrukcji zadań wzbudzających emocje ujawnia przygnębiające oblicze szkolnej edukacji matematycznej.

Logiczne myślenie – przykłady rozumowania zaprezentowane w rozwiązaniach zadań

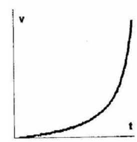
Zadanie 1. *Uczestnik powinien wskazać wykres (i podać uzasadnienie wyboru) przedstawiający zmianę prędkości sanek zjeżdżających z górki.*

Przykład 1. Uczniowie wskazywali jako rozwiązanie zadania wykres:

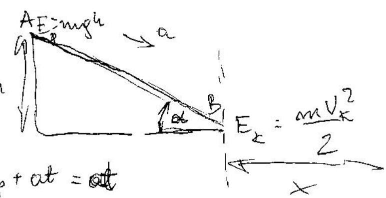


Argumentacja zawierała najczęściej następujące fakty: $V_0=0$; *następnie prędkość chłopca dość szybko się zwiększa, co przy braku jakiegokolwiek napędu oznacza, że porusza się w dół stromego zbocza. Jednak później, gdy teren przestaje być stromy, a wręcz się wypłaszcza, chłopiec powoli wytraca prędkość i na koniec* $V_k=0$, *co oznacza, że zatrzymał się w miejscu.*

Przykład 2. Jeden z uczniów wybrał wykres, argumentując:



Rysunek górki:

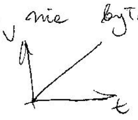


w p. A: $V_p=0$

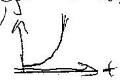
w p. B = $V_k = V_{max} = V_p + at = at$

chłopiec zjeżdża kosztem en. pot. mgh, która zamienia się w en. kinet. $\frac{mV_k^2}{2}$.

Gdyby nie było tarcia wykres $V(t)=at$ wyglądałby tak:



Jednak występuje tarcie, opory powietrza itd, dlatego $V(t) \neq at$: zależność nie jest liniowa

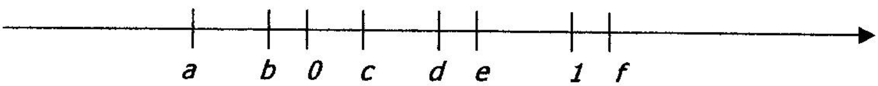


(Rozpatruję tylko ruch przy zjeżdżaniu z górki bez odcinka x za górką. Tam w wyniku tarcia pr. maleje do 0, a en. kinet. → ~~en~~ ciepło (ogrzewają się płozy, podłoże itd.)

Założenie: *rozpatruję tylko ruch przy zjeżdżaniu z górki bez odcinka za górką* spowodował, że zostało zaliczone jako poprawne.

W tym zadaniu oceniono, że 79% uczniów wykazało się zadawalającą wiedzą, a 62% – potrafiło użyć odpowiednich argumentów na potwierdzenie swojego wyboru.

Zadanie 3. *Wśród liczb zaznaczonych na osi liczbowej należało wskazać liczbę (i oczywiście uzasadnić wybór), która może być iloczynem de.*



Uczniowie ocenili to zadanie jako bardzo łatwe, ale wyniki (rozumowanie – 77%, argumentacja – 65%) na to nie wskazują. Wielu uczniów **podało** poprawną odpowiedź, jednak kłopoty sprawiło im jej uzasadnienie.

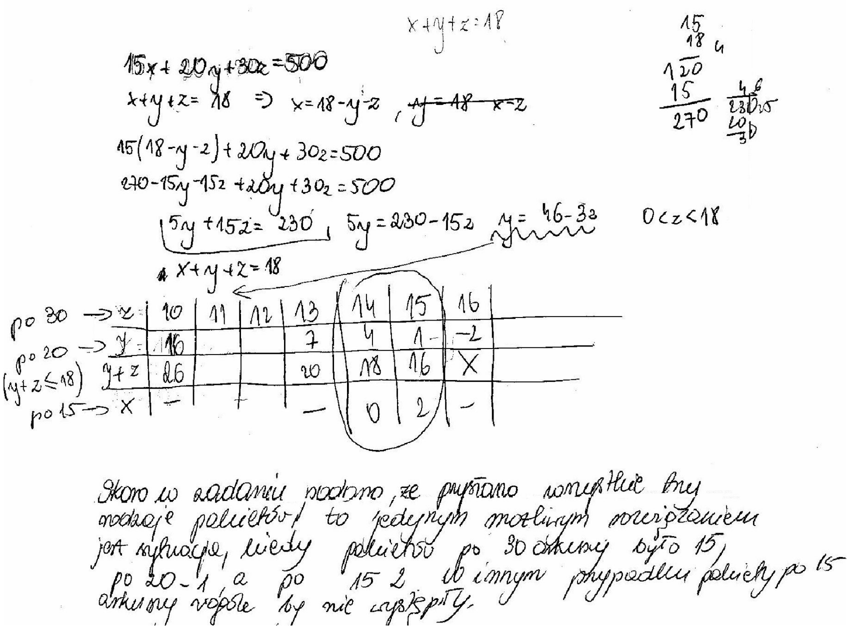
Zadanie 4. *Komisja otrzymała z drukarni 500 arkuszy egzaminacyjnych spakowanych w osiemnastu pakietach. Pakiety zawierały po 15, 20 i 30 arkuszy. Oblicz, ile było pakietów każdego rodzaju.*

Najważniejszą umiejętnością badaną w tym zadaniu było czytanie ze zrozumieniem tekstu matematycznego i zapisywanie zależności między wielkościami opisanymi w zadaniu. Większość uczniów nie miała trudności z przeprowadzeniem poprawnej analizy warunków zadania i zbudowaniem modelu matematycznego do przedstawionej sytuacji problemowej – układu dwóch równań z trzema niewiadomymi. Nie potrafili natomiast wyciągnąć wniosków, biorąc pod uwagę warunki opisane w zadaniu.

Tym bardziej cenne wydają się rozwiązania uczniów klasy pierwszej i drugiej – nie sięgali oni po układ równań, ale rozwiązywali zadanie metodą dedukcji:

Przykład 3*. Wyliczam, ile by było arkuszy, gdyby pakowano wszystkie arkusze w jeden rodzaj pakietu: 18x15+240, 20x18=360, 30x18=540; 540 to liczba najbliższa 500, a więc pakietów po 30 arkuszy jest najwięcej.*

Jeśli zamiast jednego pakietu po 30, weźmiemy jeden po 15, to łączna liczba arkuszy zwiększy się o 15. Podobnie z pakietem po 20, tylko że wtedy liczba zwiększy się o 10. Są dwie możliwości: że były 4 pakiety po 20 lub 2 po 20 i 2 po 15, ponieważ musi być przynajmniej 1 pakiet każdego rodzaju, tak więc odp. 15 pakietów po 30, 2 pakiety po 15 i 1 pakiet po 20 arkuszy.



$15x + 20y + 30z = 500$

$x+y+z = 18 \Rightarrow x = 18-y-z$, ~~$y = 18-x-z$~~

$15(18-y-z)+20y+30z=500$

$270-15y-15z+20y+30z=500$

$\boxed{5y+15z=230}$, $5y=230-15z$, $y=46-3z$ $0<z<18$

$x+y+z=18$

po 30 → z	10	11	12	13	14	15	16
po 20 → y	16			7	4	1	-2
($y+z\le18$) y+z	26			20	18	16	X
po 15 → x	–			–	0	2	–

Skoro w zadaniu podano, że kupiono wszystkie trzy rodzaje pakietów, to jedynym możliwym rozwiązaniem jest sytuacja, kiedy pakietów po 30 arkuszy było 15, po 20 – 1, a po 15 2. W innym przypadku pakiety po 15 arkuszy wcale by nie występowały.

Przykład 4.

W tym zadaniu poprawne rozumowanie – 41%, argumentacja – 31%.

Zadanie 5. *Wyznacz wszystkie liczby naturalne n spełniające równanie: (n-3)(n-4)(n-5)=990. Odpowiedź uzasadnij.*

Przykład 5. *Liczba kończy się cyfrą 0, więc jeden z czynników kończy się 0 albo dwa czynniki kończą się cyframi 2 lub 5, co jest jednak niemożliwe, gdyż różnica pomiędzy [zewnętrznymi] liczbami wynosi 2, a 5 – 2=3. Czynnikiem kończącym się cyfrą 0 będzie 10; drugim czynnikiem będzie liczba podzielna przez 11, gdyż 990 jest podzielne przez 11. Czynnikiem tym będzie 11. Trzecia liczba jest podzielna przez 9, bo 990 jest podzielne przez 9. Będzie to zatem 9.*

n=11+3=10+4=9+5=14. Odp. Liczba n to 14.

Przykład 6*.*

$(n-3)(n-4)(n-5)=n^3-12n^2+47n-60$

$n^3-12n^2+47n=990+60$

$n^3-12n^2+47n=1050$

liczbą n nie mogą być liczby mniejsze bądź równe 12, ponieważ n^3 tych liczb jest mniejsze od $12n^2$, a 47n jest za małe, by w sumie z poprzednią różnicą dać 1050. Dlatego tą liczbą jest 14.

$14^3 - 12 \cdot 14^2 + 47 \cdot 14 = 2744 - 2352 + 658 = 1050$

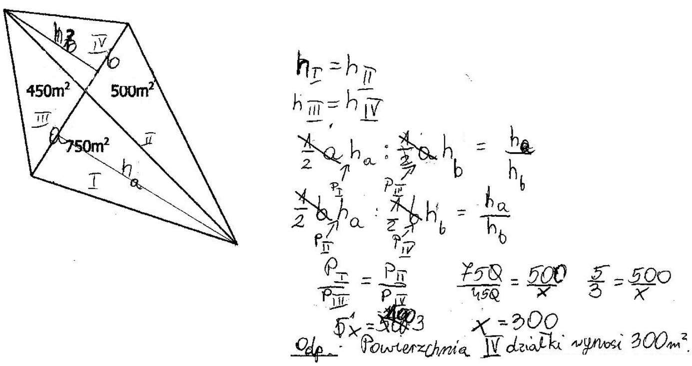
Jest to jedyna liczba spełniająca równanie.

Przykład 7. *Liczbę 990 możemy przedstawić w postaci iloczynu czynników pierwszych: 990 = 2 · 5 · 3 · 3 · 1*
Łatwo zauważyć, że liczby (n-3), (n-4), (n-5) są kolejnymi liczbami naturalnymi ustawionymi w kolejności malejącej. Wymnażając niektóre czynniki pierwsze powstałe z rozkładu liczby 990, otrzymujemy: 990 = 9 · 10 · 11, co odpowiada warunkom przedstawionym w zadaniu. Podstawiając, mamy n=14.

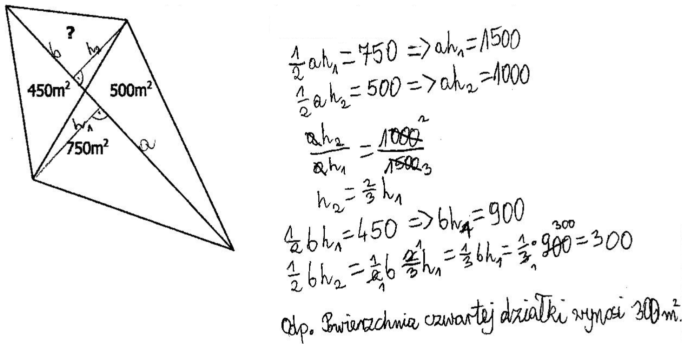
Wyniki uczniów – poprawne rozumowanie – 34%, argumentacja 33%.

Zadanie 7. *Plac w kształcie czworokąta podzielono na 4 mniejsze działki. Powierzchnie trzech działek zostały podane na rysunku. Wyznacz powierzchnię czwartej działki.*

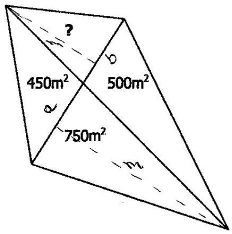
Rozwiązanie tego zadania sprawiło uczniom najwięcej problemów. Zadaniem ucznia było zbudowanie modelu matematycznego, wykorzystując własności miarowe w trójkącie. Kilkoro uczniów zapisało tylko odpowiedni stosunek pól trójkątów, nie uzasadniając jego pochodzenia, ale były też precyzyjnie opisane rozumowania świadczące nie tylko o wiedzy ucznia, ale przede wszystkim o **logicznym myśleniu**.



Przykład 8. Autorem jest uczeń klasy II:



Przykład 9. Rozwiązanie przedstawione przez ucznia klasy I:



$P_1 = 450m^2, P_2 = 750m^2, P_3 = 500m^2, P_4 = ?$

$P_1 = \frac{1}{2}a \cdot h_1$ $\quad P_4 = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_1$

$P_2 = \frac{1}{2}a \cdot h_2$

$P_3 = \frac{1}{2}b \cdot h_2$

$$\begin{cases} 450 = \frac{1}{2}ah_1 \\ 750 = \frac{1}{2}ah_2 \\ 500 = \frac{1}{2}bh_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 900 = ah_1 \Rightarrow \cancel{a = \frac{900}{h_1}}\ h_1 = \frac{900}{a} \\ 1500 = ah_2 \Rightarrow a = \frac{1500}{h_2} \\ 1000 = bh_2 \Rightarrow b = \frac{1000}{h_2} \end{cases}$$

$P_4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1000}{h_2} \cdot \frac{900}{a} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1000}{h_2} \cdot \left(900 \cdot \frac{h_2}{1500}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1000}{h_2} \cdot \frac{900h_2}{1500}$

$= \frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot \frac{9}{15} = 300\,m^2$

Odp. Czwarta działka ma powierzchnię równą $300m^2$

Przykład 10. Rozwiązanie przedstawione przez ucznia klasy III:

Przyszłość edukacji matematycznej

Test matematyczny w projekcie ***Mazowieckie Talenty*** zainaugurował wyszukiwanie uczniów utalentowanych i stwarzanie warunków rozwoju ich uzdolnień. Analiza wyników testu wprawdzie wzbudza w realizatorach projektu ***Mazowieckie Talenty*** wielkie nadzieje, gdyż pokazuje, że na najwyższym poziomie – niezależnie od poziomu osiągniętego wyniku ogólnego – jest rozumowanie, ale również powoduje refleksje pełne troski o oblicze polskiej szkoły, gdyż na najniższym poziomie – niezależnie od poziomu osiągniętego wyniku ogólnego – jest poziom wiedzy. Mimo iż uważa się powszechnie, że szkoła wyposaża młodych ludzi raczej w wiedzę encyklopedyczną, a nie umiejętności praktyczne.

Poziom merytoryczny rozwiązań zadań testu matematycznego ***Mazowieckie Talenty*** jest zróżnicowany, a język matematyczny, jakim posługiwali się piszący, jest niejednokrotnie nieporadny. Strategia rozwiązywania zadania, a tym samym ustalenie kolejności działań zależała od umiejętności budowania modelu matematycznego odpowiadającego treści zadania oraz w dużej mierze od pomysłowości zdającego, jego spostrzegawczości i umiejętności stosowania algorytmów.

Problemem dla uczniów gimnazjum (również uzdolnionych matematycznie) jest stosowanie terminologii matematycznej, argumentowanie i uzasadnianie rozwiązań, czyli wymagania zawarte w standardzie: *potrafi argumentować i prowadzić rozumowanie typu matematycznego, formułuje i uzasadnia wnioski*.

Rozwijanie matematycznych talentów to akcent na rozwijanie umiejętności argumentowania i rozumowania oraz sprawnego operowania modelami matematycznymi, będący drogowskazem nie tylko dla realizatorów projektu ***Mazowieckie Talenty,*** ale również dla nauczycieli matematyki.

Bibliografia:

1. Fedorowicz M. (red.), *Umiejętności polskich gimnazjalistów,* Wyd. IFiS PAN, Warszawa 2007.
2. Janowicz J., *Standardy kształcenia uczniów zdolnych,* "Matematyka" 1/2005.
3. Kopański S., *W poszukiwaniu matematycznych talentów,* Wyd. Dla szkoły, Wilkowice 2003.