Jerzy Paczkowski
Ośrodek Doskonalenia Nauczycieli w Słupsku
Polskie Towarzystwo Diagnostyki Edukacyjnej

Edukacja przestrzenna w nauczaniu matematyki. Diagnoza umiejętności uczniów na podstawie egzaminów zewnętrznych

Abstrakt

W roku szkolnym 2021/2022 przeprowadzony został po raz ostatni egzamin maturalny dla ostatnich roczników 3-letnich liceów ogólnokształcących. W przyszłym roku szkolnym taki sam egzamin zostanie przeprowadzony dla ostatnich roczników 4-letnich techników. Zakres badanych umiejętności był zgodny z treściami nauczania (wymagania szczegółowe) podstawy programowej kształcenia ogólnego z 2008 roku (z późniejszymi zmianami).

W artykule podjęto próbę analizy osiągnięć uczniów z geometrii przestrzennej na podstawie wyników z matematyki z egzaminów gimnazjalnych 2012–2019 i maturalnych 2015–2021, które były badane w kontekście wymagań szczegółowych, zapisanych w podstawie programowej z 2008 roku. Źródłem analizy były 24 arkusze egzaminacyjne, 16 sprawozdań. Dodatkowo porównano je z wynikami z egzaminu maturalnego z matematyki z lat 2010–2014 (10 arkuszy, 5 sprawozdań). Łącznie przeanalizowano 80 zadań egzaminacyjnych z geometrii przestrzennej.

W artykule przedstawiono zestawienia ilościowe zadań według ich typów, rodzajów brył, problemów do rozwiązania oraz obszarów umiejętności (cele kształcenia / wymagania ogólne). Przeanalizowano poziom umiejętności uczniów z geometrii przestrzennej. Zaprezentowano 4 przykładowe zadania otwarte, których wskaźnik łatwości był najniższy. Przytoczono fragmenty komentarzy ze sprawozdań.

W podsumowaniu wskazano na osiągnięcia i braki uczniów w zakresie edukacji przestrzennej w 9-letnim cyklu kształcenia gimnazjalnego i ponadgimnazjalnego.

Wstęp

Wczesna edukacja przestrzenna zarówno w przedszkolu, jak i w klasach początkowych szkoły podstawowej uwzględnia między innymi odbiór przez ucznia świata zewnętrznego, a także jego relacje z bliskim i dalszym środowiskiem (rodzina, szkoła, podwórko). W podstawach programowych edukacji wczesnoszkolnej (i przedszkolnej) zarówno w kształceniu ogólnym, jak i matematycznym podkreślano potrzebę edukacji w zakresie:

- miary – określenia/pojęcia: *tona, kilogram, dekagram, gram, litr; kilometr, metr, centymetr, milimetr; duży, mały, wysoki, średni, niski, szeroki, wąski, płaski*;
- kierunku – określenia: *z przodu, z tyłu, u góry, u dołu, wysoko, nisko, na prawo, na lewo*;
- położenia – określenia: *przed(czymś), za(czymś), nad(czymś), pod(czymś), w środku(czegoś), na wierzchu, od spodu, w środku, wewnątrz*;
- relacji – określenia: *większy(niż), mniejszy(od/niż), wyższy(od/niż), niższy(od/niż), cięższy(od/niż), lżejszy(od/niż), dalej(od/niż), bliżej(od/niż)*;
- kształtów – rozpoznawanie i rysowanie figur: *koło, trójkąt, kwadrat*.

Organizowane zabawy przedszkolne, a także zajęcia lekcyjne, mają wdrażać uczniów do praktycznego posługiwania się tymi określeniami i pojęciami, kształtując tym samym między innymi ich orientację przestrzenną. Polecenia nauczyciela edukacji wczesnoszkolnej powinny odwoływać się do bliskiego uczniowi świata pojęć, wprowadzać uczniów w sposób ukryty do przyszłych kontaktów z bryłami, aby potrafili je opisać i określić/omówić wzajemne relacje między obiektami przestrzennymi oraz w przestrzeni. Na przykład *Pomaluj jedną* ***ścianę*** *klocka*; *Postaw klocek na większej* ***podstawie***; *Policz, ile* ***krawędzi*** *ma ta bryła*; *Zaznacz na rysunku krawędzie* ***sześcianiku***; *Policz, ile* ***wierzchołków*** *ma ten klocek*.

Właściwa edukacja przestrzenna rozpoczyna się od klasy czwartej. Uczeń poznaje „klocek" jako prostopadłościan czy sześcian, operuje pojęciami, które dla niego na tym etapie nie powinny być już nowe (*ściana, podstawa, wierzchołek*). Z każdym kolejnym rokiem edukacji uczeń poznaje inne bryły, analizuje je (*wysokość, przekątna ściany, kąt płaski między prostymi, odległość punktu od prostej, odległość odcinków*) i orientuje w przestrzeni, dostrzega ich wnętrze (*przekątna bryły, kąt nachylenia prostej do płaszczyzny, odległość punktu/odcinka/prostej od płaszczyzny, kąt dwuścienny*), porównuje bryły podobne (*skala podobieństwa*) oraz umieszcza bryłę w bryle i analizuje problemy z tym związane. Wykorzystuje przy tym wiedzę o funkcjach trygonometrycznych kątów i związanych z nimi twierdzeń, rozwiązuje zadania optymalizacyjne związane z bryłami.

Źródło analizy – nieco statystyki

W roku szkolnym 2021/2022 przeprowadzony został przedostatni maturalny egzamin zewnętrzny (dla ostatnich roczników 3-letnich liceów ogólnokształcących), dla którego zakres badanych umiejętności był określony przez podstawę programową kształcenia ogólnego z 2008 roku[1]. Uczniowie liceów, przystępujący do tego egzaminu byli tymi, którzy w 2016 roku rozwiązywali zadania na ostatnim egzaminie szóstoklasisty. Podobny egzamin maturalny czeka w przyszłym roku szkolnym uczniów 4-letnich techników.

W artykule zajmę się zagadnieniami związanymi z edukacją przestrzenną uczniów, opierając się na diagnozie ich umiejętności na podstawie egzaminów zewnętrznych.

[1] Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 23 grudnia 2008 r. *w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz kształcenia ogólnego w poszczególnych typach szkół* (Dz.U. z 2009 roku nr 4, poz. 17) – z późniejszymi zmianami.

Do analizy wykorzystano arkusze egzaminacyjne i sprawozdania z osiągnięć uczniów:

- egzaminu gimnazjalnego z matematyki z lat 2012–2019[2],
- egzaminu maturalnego z matematyki (poziom podstawowy i poziom rozszerzony) z lat 2015–2022[3].

Osiągnięcia te sprawdzane były w odniesieniu do podstawy programowej (2008).

Do porównania przeanalizowano również arkusze egzaminacyjne i sprawozdania osiągnięć uczniów na egzaminie maturalnym z matematyki (poziom podstawowy i poziom rozszerzony) z lat 2010–2014. W tych latach osiągnięcia uczniów sprawdzane były w odniesieniu do standardów wymagań.

Pominięto analizę zadań na sprawdzianie szóstoklasisty (po klasie 6 szkoły podstawowej), bo w nowej formule z wydzielonymi zadaniami z matematyki przeprowadzony był on tylko dwa razy. Tak więc materiał porównawczy z zakresu edukacji przestrzennej na sprawdzianie szóstoklasisty jest zbyt mały.

Z zestawienia wynika, że zadania z geometrii przestrzennej największy udział procentowy we wszystkich arkuszach miały na egzaminie gimnazjalnym. Natomiast jeśli chodzi o egzamin maturalny z matematyki w latach 2015–2022, to widać, że liczba zadań z geometrii przestrzennej (udział procentowy) była mniejsza, także mniejsza niż w latach 2010–2014. W przypadku egzaminu maturalnego może to wynikać m.in. stąd, że w kształceniu ponadgimnazjalnym z matematyki jest więcej działów[4].

Taki rozkład liczebności zadań sprawdzających umiejętności z zakresu geometrii przestrzennej jest zresztą porównywalny z rozkładem treści, proponowanych przez różne programy nauczania – liczba godzin na tę edukację stanowi 9–10% godzin w 9-letnim cyklu kształcenia podstawowego, gimnazjalnego i ponadgimnazjalnego[5].

---

[2] *Informator o egzaminie gimnazjalnym od roku szkolnego 2011/2012*, CKE Warszawa 2010 [z późniejszymi zmianami], https://cke.gov.pl/egzamin-gimnazjalny/informatory/ [dostęp: 22.06.2022]. Pierwszy egzamin gimnazjalny został przeprowadzony w 2002 roku – egzamin był obowiązkowy dla wszystkich uczniów. W latach 2002–2011 egzamin składał się z trzech części (humanistycznej, matematyczno-przyrodniczej i językowej). Od roku 2012 wprowadzono zmianę, polegającą na wyodrębnieniu zagadnień dotyczących języka polskiego i matematyki – uczniowie wypełniali pięć arkuszy egzaminacyjnych.

[3] *Informator o egzaminie maturalnym z matematyki od roku szkolnego 2014/2015*, CKE Warszawa 2013 – z późniejszymi zmianami. Pierwszy zewnętrzny egzamin maturalny przeprowadzony został w 2005 roku. Od 2010 roku egzamin maturalny z matematyki był obowiązkowy dla wszystkich uczniów – zakres badanych umiejętności uczniów określały standardy wymagań. Od tego roku wprowadzono nową formę arkuszy egzaminacyjnych z matematyki dla poziomu podstawowego – zawierały zadania zamknięte i otwarte. Od roku 2015 zakres badanych umiejętności uczniów określony został przez obowiązującą podstawę programową kształcenia ogólnego (2008). Od tego roku zmieniono również formę arkusza egzaminacyjnego z matematyki dla poziomu rozszerzonego – zawierał zadania zamknięte, jedno zadanie na zakodowanie odpowiedzi i zadania otwarte.

[4] Udział zagadnień dotyczących edukacji przestrzennej w odniesieniu do wszystkich działów podstawy programowej z 2008 roku jest porównywalny z NOWĄ podstawą programową. Analizę rozkładu treści wg działów, ale w odniesieniu do NOWEJ podstawy programowej (2017 i 2018), przedstawiono m.in. w artykułach: J. Paczkowski, *Continuum edukacji matematycznej (część I). Continuum, czyli ciągłość edukacji matematycznej w szkole podstawowej*, „Informator Oświatowy" ODN w Słupsku, nr 4/2021; J. Paczkowski, *Continuum edukacji matematycznej. Część II. Continuum, czyli ciągłość edukacji matematycznej w szkole ponadpodstawowej*, „Informator Oświatowy" ODN w Słupsku, nr 1/2022.

[5] Patrz: J. Paczkowski, *Matematyczna przestrzeń edukacyjna – na podstawie egzaminu ósmoklasisty* [w:] B. Niemierko, M.K. Szmigel (red.), *Rola społeczna diagnostyki edukacyjnej*, PTDE, Kraków–Warszawa 2020.

Tabela 1. Geometria przestrzenna na egzaminach gimnazjalnych i maturalnych z matematyki – typy zadań

	Egzamin gimnazjalny 2012–2019	Egzamin maturalny (poziom podstawowy) 2015–2022	Egzamin maturalny (poziom rozszerzony) 2015–2022	Egzamin maturalny (poziom podstawowy) 2010–2014	Egzamin maturalny (poziom rozszerzony) 2010–2014	Ogółem zadań
WW	13	17	-	12	-	42
PF	2	-	-	-	-	2
Arg	1	-	-	-	-	1
RO	7	6	10	6	6	35
RAZEM	23	23	10	18	6	80
Łącznie zadań w arkuszach	184	274	122	169	57	806
	12,50%	8,39%	8,20%	10,65%	10,53%	9,93%

Legenda: WW – zadania zamknięte wielokrotnego wyboru (za 1 punkt); PF – zadania zamknięte typu Prawda–Fałsz (za 1 punkt); Arg – zadania zamknięte 1-punktowe na argumentację, w których uczeń wybiera poprawną odpowiedź (T/N) i dobiera uzasadnienie (A, B, C); RO – zadanie otwarte wielopunktowe.

W zadaniach egzaminu gimnazjalnego i maturalnego w różnej częstotliwości występowały bryły, z którymi związane były problemy do rozwiązania. W tabeli 2 przeprowadzono analizę pod kątem występowania brył w tych zadaniach.

Tabela 2. Rodzaje brył (i ich częstotliwość występowania) w zadaniach z geometrii przestrzennej na egzaminach gimnazjalnych i maturalnych, jako problem do analizy i rozwiązania

	Egzamin gimnazjalny 2012–2019	Egzamin maturalny (poziom podstawowy) 2015–2022	Egzamin maturalny (poziom rozszerzony) 2015–2022
WW	sześcian (3) prostopadłościan (5) graniastosłupy (1) ostrosłupy (1) bryły obrotowe (3)	sześcian (2) prostopadłościan (1) graniastosłupy (5) ostrosłupy (2) bryły obrotowe (7)	
PF	sześcian (1) ostrosłupy (2)		
Arg	ostrosłupy (1)		
RO	sześcian (1) prostopadłościan (1) graniastosłupy (2) ostrosłupy (1) bryły obrotowe (2)	graniastosłupy (2) ostrosłupy (4)	prostopadłościan (1) graniastosłupy (2) ostrosłupy (4) bryły obrotowe (4)
Ogółem	sześcian (5) prostopadłościan (6) graniastosłupy (3) ostrosłupy (5) bryły obrotowe (5)	sześcian (2) prostopadłościan (1) graniastosłupy (7) ostrosłupy (6) bryły obrotowe (7)	prostopadłościan (1) graniastosłupy (2) ostrosłupy (4) bryły obrotowe (4)

Legenda: Liczby w nawiasach oznaczają, w ilu zadaniach wystąpiły wskazane bryły.

Tak więc w arkuszach egzaminacyjnych mamy pełny przegląd wszystkich brył, które są uwzględnione w podstawie programowej (2008). W kilku przypadkach – czego nie widać w tabeli – w jednym zadaniu wystąpiły dwie różne bryły (sześcian i ostrosłup, ostrosłup i walec, czworościan i kula, walec i półkula, stożek i kula).

Z zestawienia wynika, że w zadaniach egzaminacyjnych zdecydowanie częściej występują graniastosłupy (wliczono do nich także sześciany i prostopadłościany). Jest ich mniej więcej tyle samo co łącznie ostrosłupów i brył obrotowych. Częściej problemy związane z bryłami występują w zadaniach zamkniętych niż w otwartych. Wynika to m.in. stąd, że zadań zamkniętych na egzaminie gimnazjalnym i na egzaminie maturalnym PP jest 5–7 razy więcej niż zadań otwartych.

Dla porównania – bryły na egzaminie maturalnym (2010–2014), dla którego podstawą diagnozy były standardy wymagań, wystąpiły:

- na poziomie podstawowym – sześcian (3 razy), prostopadłościan (4 razy), graniastosłupy (3 razy), ostrosłupy (4 razy), bryły obrotowe (4 razy),
- na poziomie rozszerzonym – graniastosłupy (1 raz), ostrosłupy (5 razy).

Warto przyjrzeć się arkuszom egzaminacyjnym pod kątem, czego dotyczyło sformułowanie problemu do rozwiązania, czego oczekiwano („co należało obliczyć") od ucznia, rozwiązującego zadania egzaminacyjne. Takie zestawienie ilościowe przedstawia tabela 3.

Tabela 3. Problemy do rozwiązania w zadaniach z geometrii przestrzennej („co należało obliczyć") na egzaminach gimnazjalnych i maturalnych.

	EG 2012–19	EM PP 2015–22	EM PR 2015–22	EM PP 2010–14	EM PR 2010–14	Razem
Długość odpowiednich odcinków	8	4	6	6	1	25
Kąt prostej z płaszczyzną		2				2
Sinus/cosinus kąta dwuściennego		3	2		1	6
Pole przekroju		1		1		2
Pole powierzchni bocznej		1		2		3
Pole powierzchni całkowitej	1	4	1			6
Objętość	12	9	4	5	4	34
Inne	3			4		7

Legenda: W niektórych zadaniach należało obliczyć kilka elementów.

Tak więc najczęściej w zadaniach należało obliczyć długości odpowiednich odcinków, np. krawędzi, wysokości, przekątnych, promieni, odległości oraz objętości brył.

Natomiast na egzaminie maturalnym 2015–2022 na poziomie rozszerzonym wystąpiły 3 zadania, które wymagały zastosowania rachunku pochodnych do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych. Na egzaminie maturalnym 2010–2014 na poziomie rozszerzonym było tylko jedno takie zadanie.

Diagnoza umiejętności uczniów

Rozwiązanie każdego zadania przez ucznia – niezależnie od charakteru i zawartych w nich treści – sprowadza się jakby do dwóch mechanizmów:

- **Typowe/standardowe** – uczeń wykorzystuje posiadaną wiedzę, dobiera/pozyskuje odpowiednią informację i ją przekształca, ewentualnie dobiera odpowiedni obiekt/model matematyczny (np. stosując typowy algorytm podstępowania przy rozwiazywaniu zadania). Może to przejawiać się w formie graficznej lub przez zapis pewnych informacji związanych z prezentowanym rozwiązaniem (np. komentując lub uzasadniając wykonywane operacje/czynności). Często takie postępowanie ma charakter algorytmiczny lub odtwórczy dla sytuacji standardowych/typowych. W efekcie prowadzi to do przedstawienia rozwiązania.
- **Nietypowe/twórcze** – uczeń dobiera lub tworzy nowy model matematyczny, przy wykorzystaniu znanych informacji i obiektów matematycznych, oraz przymierza/dostosowuje je do niestandardowej sytuacji, która wymaga od ucznia twórczego działania w postaci analizy i syntezy problemu. W tym przypadku wymagane jest stworzenie strategii postępowania, zaprezentowanie rozumowania i jego uzasadnienie oraz zweryfikowanie otrzymanego wyniku.

Zadania w arkuszach egzaminacyjnych – niezależnie od ich treści – sprawdzały pewne obszary umiejętności, które w podstawie programowej określane są jako cele kształcenia czy wymagania ogólne. Takie zestawienie wymagań w odniesieniu do liczby zadań przedstawia tabela 4. Sporządzono je, opierając się na kartotekach testów egzaminacyjnych.

Tabela 4. Cele kształcenia/wymagania ogólne (obszary umiejętności) – zestawienie ilościowe zadań z geometrii przestrzennej na egzaminach gimnazjalnych i maturalnych

	EG 2012–19	EM PP 2015–22	EM PR 2015–22	EM PP 2010–14	EM PR 2010–14	Razem
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji	1	3		2		6
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	5	12+1		7		24+1
III. Modelowanie matematyczne	4		4	3	2	13
IV. Użycie i tworzenie strategii	12	6+1	5+1	6	4	33+2
V. Rozumowanie i argumentacja	2					2

Legenda: W jednym z zadań EG badanie były dwa obszary umiejętności. Zapis „12+1" oznacza, że prócz 12 zadań z egzaminu maturalnego z lat 2015–2021 (dla których jest sporządzony raport z osiągnięć uczniów) uwzględniono także zadania z egzaminu maturalnego 2022, pomimo braku raportu. Dla egzaminu maturalnego 2022 dobór obszaru umiejętności jest autorski.

Tak więc umiejętności uczniów z zakresu geometrii przestrzennej badano zadaniami, które z jednej strony wymagały zinterpretowania treści, aby móc je przedstawić w postaci standardowego rozwiązania, z wykorzystaniem dostępnych obiektów matematycznych (drugi cel kształcenia, wymagania ogólne: *Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji*), z drugiej natomiast strony wymagały stworzenia strategii rozwiązania (czwarty cel kształcenia, wymagania ogólne: *Użycie i tworzenie strategii*).

Najczęściej obszar umiejętności z zakresu użycia i tworzenia strategii badano przede wszystkim zadaniami otwartymi, które wymagały od ucznia pełnego przedstawienia toku rozumowania w postaci rozwiązanego zadania. Natomiast obszar umiejętności z zakresu wykorzystania i interpretowania reprezentacji/obiektu częściej badano zadaniami zamkniętymi. Dotyczy to także umiejętności rozumowania i argumentowania (piąty cel kształcenia, wymagania ogólne: *Rozumowanie i argumentacja*), które były badane zadaniami zamkniętymi typu PF i Arg.

W przypadku zadań otwartych można było prześledzić tok rozumowania ucznia, wskazać na błędy merytoryczne, rachunkowe bądź wynikające z nieuwagi. Z kolei w przypadku zadań zamkniętych do zweryfikowania był jedynie efekt rozumowania ucznia, na podstawie zakreślonej odpowiedzi, co nie zawsze odzwierciedla stan faktyczny odnośnie do badanej umiejętności.

W każdym raporcie z kolejnych egzaminów gimnazjalnych z matematyki (2012–2019) i egzaminów maturalnych z matematyki (2015–2022) możemy prześledzić poziom opanowania treści nauczania, wyrażonych w podstawie programowej (2008) w postaci wymagań szczegółowych. Każde zestawienie wyników poziomu opanowania umiejętności (czyli osiągnięcia uczniów) z poszczególnych lat jest nieporównywalne, gdyż każdego roku egzamin dotyczy innej populacji uczniów oraz przeprowadzany jest na podstawie różniących się narzędzi sprawdzających (arkusze egzaminacyjne). Dlatego w tabeli 5 dla poszczególnych typów brył nie uśredniano wyników z kolejnych lat dla egzaminu gimnazjalnego i maturalnego. Podano jedynie przedziały liczbowe (najniższy i najwyższy wynik).

Tabela 5. Poziom opanowania umiejętności z geometrii przestrzennej na egzaminach gimnazjalnych i maturalnych – wg rodzajów brył

	Typ zad.	EG 2012–19	EM PP *) 2015–22	EM PR *) 2015–22	EM PP 2010–14	EM PR 2010–14
Sześcian	Z	28–76	62–72		65	
	O	20	34			
Prostopadłościan	Z	43–60	82–86		73	
	O	36	44			28
Graniastosłupy	Z	36	55–70		60–74	
	O	32–36	42	54	34–46	34
Ostrosłupy	Z	37–47	69–78		60	
	O	26	46–47	23–72	21–45	12–24
Bryły obrotowe	Z	48–54	70–90		60–87	
	O	24–39				24–48

*) W zestawieniu nie uwzględniono informacji z osiągnięć uczniów na egzaminie maturalnym 2022 (raport ukaże się dopiero we wrześniu lub październiku 2022).

Zestawienie wyników w tabeli 5 potwierdza obserwowaną od lat tendencję – w rozwiązywanych zadaniach otwartych uczniowie wykazują niższy poziom opanowania umiejętności aniżeli w przypadku zadań zamkniętych.

Porównując powyższe zestawienie poziomu opanowania umiejętności przez uczniów wg rodzajów brył z podobnym zestawieniem liczby zadań w zależności od rodzajów brył (tab. 2), można z łatwością określić, ile zadań składa się na wyniki z egzaminu gimnazjalnego 2012–2019 i maturalnego 2015–2022, przedstawione w postaci przedziałów liczbowych. W przypadku egzaminów gimnazjalnych (23 zadania) daje się zauważyć porównywalny rozkład liczby zadań między poszczególnymi rodzajami brył. Natomiast zadania maturalne najczęściej dotyczyły ostrosłupów i brył obrotowych (po 10 zadań dla każdej z tych brył – łącznie 33), w dalszej kolejności graniastosłupów (7 zadań). Z kolei gdyby analizować tylko bryły graniaste, czyli bez brył obrotowych, to można zauważyć, że na egzaminach gimnazjalnych w 15 zadaniach (na 23) występowały sześciany, prostopadłościany oraz graniastosłupy i ostrosłupy o podstawie czworokątnej (prostokąt, kwadrat), a na egzaminach maturalnych 2015-2022 było takich zadań 17 (na 33). Zadania dotyczące tych brył graniastych powinny sprawiać uczniom mniej trudności – jednak tak nie było.

Niepowodzenia uczniów – przykłady zadań z EG 2012–2019 i EM 2015–2021

Patrząc na wskaźniki łatwości dla zadań z matematyki na egzaminie gimnazjalnym 2012–2019 i maturalnym 2015–2021 (PP i PR), sprawdzających poziom umiejętności uczniów z geometrii przestrzennej, możemy stwierdzić, że na 56 analizowanych zadań z matematyki aż 30 zadań było trudnych i jedno zadanie bardzo trudne:

- na egzaminie gimnazjalnym – 16 zadań trudnych (9 zadań zamkniętych, 7 zadań otwartych), z tego 5 zadań ze wskaźnikiem łatwości do 30 p.p.
- na egzaminie maturalnym PP – 6 zadań trudnych (wszystkie zadania otwarte), z tego 2 zadania ze wskaźnikiem do 30 p.p.
- na egzaminie maturalnym PR – 8 zadań trudnych i jedno zadanie bardzo trudne (wszystkie zadania otwarte), z tego 6 zadań ze wskaźnikiem do 30 p.p.

Większość tych zadań (64,5%) sprawdzała umiejętność użycia i tworzenia strategii.

Porównując zadania z wyżej wymienionych egzaminów gimnazjalnych i maturalnych pod kątem badanych treści nauczania (wymagania szczegółowe w podstawie programowej 2008) oraz strategii rozwiązań, można zauważyć, że:

- **Wszystkie zadania gimnazjalne dotyczące brył** (16 zadań zamkniętych i 7 zadań otwartych) oraz **część zadań maturalnych** (PP – 10 zadań zamkniętych, 2 zadania otwarte, na łączną liczbę 23 zadań; PR – jedno zadanie otwarte na 10) **to zadania standardowe**, wymagające niezbyt skomplikowanych obliczeń i dla których wybór strategii rozwiązania jest bardziej oczywisty. Stanowiły one **64,3% wszystkich zadań egzaminacyjnych (gimnazjalnych i maturalnych) z geometrii przestrzennej**.

W tych zadaniach dane były długości krawędzi lub pola powierzchni, lub objętości brył, a należało obliczyć objętości albo długości krawędzi.

- 11 zadań maturalnych dotyczących brył z poziomu podstawowego (7 zadań zamkniętych, 4 zadania otwarte) oraz 5 zadań z poziomu rozszerzonego wymagało **niestandardowej strategii rozwiązania**. Stanowiły one **48,5% zadań maturalnych z geometrii przestrzennej**. Wymagały one od uczniów wiedzy z kilku działów. Na przykład do rozwiązania tych zadań potrzebne były wiadomości dotyczące własności brył, ale także kątów (płaskich, nachylenia prostej do płaszczyzny, dwuściennych) i funkcji trygonometrycznych oraz umiejętność kreślenia brył wraz z przekrojami. W tych zadaniach należało przede wszystkim dostrzec „przestrzenność brył", czyli zauważyć lub dorysować pewne odcinki, dzięki którym widoczne były wspomniane wyżej obiekty.
- Trzy zadania z egzaminu maturalnego z poziomu rozszerzonego wymagały zastosowania rachunku pochodnych do rozwiązania zagadnień optymalizacyjnych, wynikających z treści zadania.
- Jedno zadanie z egzaminu maturalnego z poziomu rozszerzonego dotyczyło dwóch brył – ostrosłupa prawidłowego czworokątnego i wpisanej w nim kuli.

Warto zauważyć, że **wszystkie analizowane/wymienione wyżej zadania otwarte z geometrii przestrzennej (gimnazjalne i maturalne) oraz 9 zadań zamkniętych gimnazjalnych z tego obszaru okazały się zadaniami trudnymi**.

Analiza rozwiązań poszczególnych zadań z geometrii przestrzennej z egzaminów zewnętrznych pozwala określić, w jakim stopniu uczniowie opanowali „widzenie przestrzenne", które wyraża się zarówno poprzez zrozumienie treści zadania i przedstawienie jej w formie rysunku, czyli rzutu figury przestrzennej na płaszczyznę, ale także poprzez umiejętność doboru odpowiedniej strategii rozwiązania i zastosowania posiadanej wiedzy do tej strategii.

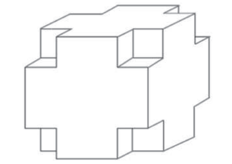
Poniżej przeanalizuję **przykładowe zadania, które sprawiły uczniom dużą trudność**. W niektórych przypadkach odwołam się do modelu rozwiązania i schematu punktowania, zaproponowanego przez CKE. Warto przy tym zwrócić uwagę na te elementy rozumowania ucznia („z automatu"), które powinny być efektem ciągu skojarzeń, wynikających z analiz przy rozwiązywaniu podobnych zadań na zajęciach lekcyjnych.

Przykład 1 – EG 2014; zadanie 23 (wskaźnik łatwości 0,20)[6]

Zadanie za 0–3 p.
Cel kształcenia – IV. *Użycie i tworzenie strategii.*
Umiejętność – 11. *Bryły*. 2) *Oblicza pola powierzchni i objętość graniastosłupa prostego, ostrosłupa, walca, stożka, kuli (także w zadaniach osadzonych w kontekście praktycznym).*

[6] Przy analizie ww. przykładowych zadań wykorzystano: *Osiągnięcia uczniów kończących gimnazjum w roku 2014*, CKE, Warszawa 2014; *Osiągnięcia uczniów kończących gimnazjum w roku 2015*, CKE, Warszawa 2015; *Sprawozdanie z egzaminu maturalnego 2017. Matematyka*, CKE, Warszawa 2017; *Sprawozdanie za rok 2017. Egzamin maturalny. Matematyka, poziom podstawowy i rozszerzony*, CKE, Warszawa 2020.

Z sześcianu zbudowanego z 64 małych sześcianów o krawędzi 1 cm usunięto z każdego narożnika po jednym małym sześcianie (patrz rysunek).
Oblicz pole powierzchni powstałej bryły i porównaj je z polem powierzchni dużego sześcianu.



Pewne elementy rozumowania ucznia powinny być „z automatu":

Skoro 64 małych sześcianików tworzy ten duży, to oznacza, że objętość dużego jest równa 64 cm^3. Czyli że krawędź dużego sześcianu jest równa 4 cm (na zasadzie kojarzenia ze wzorem lub mechanizmem obliczania objętości sześcianu – „długość" × „długość" × „długość").

- Tak więc jedna ściana sześcianu ma 16 cm^2 powierzchni, a powierzchnia całkowita dużego sześcianu jest równa 96 cm^2 (6 ścian po 16 cm^2).

Teraz dopiero powinna nastąpić właściwa analiza problemu:

- Wycięte sześcianiki odsłaniają 3 dodatkowe małe ścianki. Natomiast gdyby z powrotem wstawić wycięty sześcianik, to w tej sytuacji widoczne byłyby u niego takie same 3 ścianki. Stąd wniosek, że powierzchnia dużego sześcianu praktycznie nie zmieniła się – powierzchnia nowej bryły jest równa 96 cm^2.

Z zaproponowanego schematu punktowania (CKE EG 2014) wynika, że do otrzymania 1 punktu (na 3 p. możliwe) wystarczyło obliczyć pole powierzchni całego sześcianu lub jednej ściany, co stanowi 33% przypisanych punktów. Można przypuszczać, że znaczna grupa uczniów albo pominęła to zadanie, albo przedstawiła niepoprawne rozwiązanie.

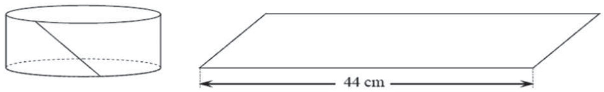
Przykład 2 – EG 2015; zadanie 23 (wskaźnik łatwości 0,24)

Zadanie za 0–4 p.

Cel kształcenia – IV. *Użycie i tworzenie strategii*. V. *Rozumowanie i argumentacja*.

Umiejętność – 11. *Bryły*. 2) *Oblicza* […] *objętość* […] *walca* […] *kuli (także w zadaniach osadzonych w kontekście praktycznym)*.

Po rozklejeniu ściany bocznej pudełka, mającego kształt walca, otrzymano równoległobok. Jeden z boków tej figury ma 44 cm, a jej pole jest równe 220 cm^2. Oblicz objętość pudełka. Przyjmij przybliżenie π równe $\frac{22}{7}$.



Tym razem trudno mówić o rozumowaniu ucznia „z automatu", gdyż powierzchnia boczna walca przedstawiona została inaczej. Standardowo powierzchnia boczna przypomina pasek w kształcie prostokąta. Tym razem miała kształt równoległoboku.

Nieco trudniejsza analiza problemu może wyglądać następująco:

- Pudełko ma kształt walca. Rozłożony pasek w kształcie równoległoboku to jego powierzchnia boczna.
- Mamy więc równoległobok o polu 220 cm^2 i podstawie długości 44 cm. Łatwo (z wzoru lub „z automatu") wyliczyć wysokość tego równoległoboku – jest ona równa 5 cm. Jeśli zaznaczyć tę wysokość na równoległoboku, to widać, że jest to zarazem wysokość walca.
- Analizowany równoległobok powstał z trochę nietypowego rozwinięcia powierzchni bocznej walca, czyli gdyby zwinąć pasek ponownie, to ten odcinek 44 cm tworzy obwód podstawy (koła).
- Wystarczy skorzystać z wzoru na obwód koła $0 = 2\pi r$ i po obliczeniach mamy, że promień podstawy walca jest równy $r = 7$ cm.
- Mając promień podstawy walca i jego wysokość, łatwo obliczyć objętość tego walca, wystarczy skorzystać z gotowego wzoru.

Z zaproponowanego schematu punktowania (CKE EG 2015) wynika, że do otrzymania 1 punktu (na 4 p. możliwe) wystarczyło obliczyć wysokość równoległoboku (lub promień podstawy walca), natomiast aby otrzymać 2 punkty (na 4 p.), należało obliczyć obie wielkości (wysokość i promień).

Można przypuszczać, że uczniowie popełnili błędy rachunkowe lub zastosowali niewłaściwy wzór, albo po prostu pominęli to zadanie.

Przykład 3 – EM PP 2017; zadanie 34 (wskaźnik łatwości 0,23)[7]

Zadanie za 0–4 p. Cel kształcenia – IV. *Użycie i tworzenie strategii.* Umiejętność – G11. *Bryły.* 2) *Oblicza pola powierzchni i objętość graniastosłupa prostego, ostrosłupa, walca, stożka (także w zadaniach osadzonych w kontekście praktycznym)*[1].
W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym wysokość ściany bocznej prostopadła do krawędzi podstawy ostrosłupa jest równa $\frac{5\sqrt{3}}{4}$, a pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa jest równe $\frac{15\sqrt{3}}{4}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Początkowe rozumowania ucznia powinny być „z automatu":

- Skoro powierzchnia boczna ostrosłupa, a więc jego trzech ścian, jest równa $\frac{15\sqrt{3}}{4}$, to powierzchnia jednej ściany jest równa $\frac{5\sqrt{3}}{4}$.
- Ściany boczne mają kształt trójkąta równoramiennego. Mając dane pole i wysokość trójkąta oraz korzystając z wzoru na pole trójkąta $P = \frac{1}{2} a \cdot h$, łatwo wyliczyć, że długość krawędzi podstawy ostrosłupa jest równa 2.

---

[7] Umiejętność sprawdzana tym zadaniem dotyczy przede wszystkim podstawy programowej z gimnazjum – umiejętność została sformułowania przez autora artykułu. Natomiast konstruktorzy arkusza egzaminacyjnego podali błędną umiejętność, z odwołaniem do miar kątów i zastosowania funkcji trygonometrycznych – patrz: Sprawozdanie z egzaminu maturalnego 2017. Matematyka, CKE, Warszawa 2017.

Dalsze rozumowanie ucznia wymaga skorzystania z wiedzy o pewnych własnościach takiego ostrosłupa (gdzie znajduje się spodek wysokości ostrosłupa, jak dzielą się środkowe podstawy ostrosłupa, czyli trójkąta równobocznego), a następnie wyliczenia długości wysokości i skorzystania z twierdzenia Pitagorasa. W końcowym etapie rozwiązania wystarczyło już skorzystać z wzoru na objętość ostrosłupa o podstawie trójkąta równobocznego.

Z zaproponowanego schematu punktowania (CKE EM PP 2017) wynika, że do otrzymania 2 punktów (na 4 p. możliwe) wystarczyło obliczyć długość krawędzi podstawy ostrosłupa i pokazać, jak będzie zastosowane twierdzenie Pitagorasa.

Można przypuszczać, że uczniowie popełnili błędy rachunkowe lub zastosowali niewłaściwy wzór albo po prostu pominęli to zadanie. Z pewnością utrudnieniem dla uczniów mogło być poprawne zaznaczenie odpowiednich odcinków na ostrosłupie. Dodatkowym utrudnieniem, być może wprowadzającym w błąd uczniów, było sformułowanie w zadaniu: *wysokość ściany bocznej prostopadła do krawędzi podstawy ostrosłupa*, co mogło być odczytane, że chodzi o wysokość ostrosłupa.

Przykład 4 – EM PP 2020; zadanie 34 (wskaźnik łatwości 0,21)

Zadanie za 0–5 p. Cel kształcenia – IV. *Użycie i tworzenie strategii.* Umiejętność – 9. *Stereometria.* 2) *Rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami i płaszczyznami (krawędziami i ścianami, przekątnymi i scianami), oblicza miary tych kątów*. 6. *Trygonometria.* 1) *Wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kątów o miarach 0 do 180 stopni.*
Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny ABCDS, którego krawędź boczna ma długość 6. Ściana boczna tego ostrosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem, którego tangens jest równy $\sqrt{7}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Zadanie jest trudne, bowiem bada dwie odrębne umiejętności. Niczego „z automatu” uczeń nie wywnioskuje.

Aby można było poprawnie rozwiązać zadanie, trzeba przede wszystkim wskazać odpowiedni kąt dwuścienny, jaki tworzy ściana boczna z podstawą. Na rysunku należało zaznaczyć wysokość ściany bocznej, wysokość ostrosłupa, odcinek łączący spodki tych wysokości. W tak otrzymanym trójkącie prostokątnym należało wybrać odpowiednie odcinki, pokazać, jak oblicza się tangens kąta dwuściennego, którego miarą jest odpowiedni kąt płaski w tym trójkącie prostokątnym.

Tak więc w dalszej części zadania, korzystając z wzoru $tg\alpha = \frac{H}{0,5a}$, można było wyliczyć zależność między długością wysokości ostrosłupa (H) a długością krawędzi podstawy (a). Przy zastosowaniu twierdzenia Pitagorasa można wtedy wyliczyć długości tych odcinków. Samo wyliczenie objętości ostrosłupa nie powinno już sprawiać problemów.

Z zaproponowanego schematu punktowania (CKE EM PP 2020) wynika, że do otrzymania 2 punktów (na 5 p. możliwych) wystarczyło wyliczyć zależność między wysokością ostrosłupa a krawędzią podstawy i pokazać, jak będzie zastosowane twierdzenie Pitagorasa.

Można przypuszczać, że uczniowie popełnili błędy rachunkowe lub zastosowali niewłaściwy wzór albo po prostu pominęli to zadanie. Tutaj także, podobnie jak w poprzednim zadaniu, utrudnieniem dla uczniów mogło być poprawne zaznaczenie odpowiednich odcinków na ostrosłupie. Ponadto samo rozwiązania zadania wymagało skorzystania z dwóch odrębnych działów matematyki – geometrii przestrzennej i trygonometrii.

Oba ostatnie przykłady zadań maturalnych z poziomu podstawowego mogą wskazywać na to, że uczniowie mogą mieć problemy z wyobraźnią przestrzenną odnośnie do brył, które ilustrowane są w rzucie na płaszczyznę. Problemem jest wspomniane wyżej w artykule „wejrzenie do wnętrza" bryły.

Na niską efektywność edukacji przestrzennej na matematyce – na podstawie wyników egzaminów gimnazjalnych 2012–2019 i maturalnych 2015–2022 – zwracają uwagę autorzy prawie wszystkich sprawozdań CKE (patrz: komentarze i rekomendacje).

Poniżej przedstawiam **komentarze z wybranych sprawozdań z egzaminów** – tylko w odniesieniu do wyżej omawianych zadań. Podobne komentarze odnośnie do zadań egzaminacyjnych z geometrii przestrzennej można przeczytać w sprawozdaniach z pozostałych egzaminów.

W komentarzach o osiągnięciach uczniów z geometrii przestrzennej z egzaminów czytamy m.in.:

- Istotną barierą, którą napotkali zdający, było **dostrzeżenie związków między wielkościami występującymi w zadaniu**, w szczególności gdy sytuacje były nietypowe lub dane przedstawiono w niestandardowy sposób. (EG 2014, s. 53)[8]
- Analiza uzyskanych podczas tegorocznego egzaminu rozwiązań zadań ze stereometrii, zarówno zadań zamkniętych: 17, 18 i 19, jak i zadania 23, otwartego, ujawniła **problem niewystarczająco ukształtowanej wyobraźni przestrzennej** u dużej części uczniów. […] Zdający, rozwiązując je [*zad. 23 – przyp. aut.*], musieli wykazać się umiejętnościami przeprowadzenia prostego rozumowania matematycznego i użycia właściwej strategii […] Zadanie można było rozwiązać różnymi sposobami, ale każdy z nich wymagał od uczniów znajomości własności sześcianu oraz wyobraźni przestrzennej. (EG 2014, s. 56)
- […] wśród zadań geometrycznych **znacznie trudniejsze** były **zadania ze stereometrii niż z planimetrii**. Za rozwiązanie zadań z planimetrii gimnazjaliści zdobyli 43% możliwych do uzyskania punktów, podczas gdy za zadania ze stereometrii tylko 33% możliwych do uzyskania punktów. […] Do poprawnego rozwiązywania zadań ze stereometrii **potrzebna jest dobrze ukształtowana wyobraźnia przestrzenna, a tej**

[8] Zapis EG 2014 oznacza, że cytowany komentarz pochodzi ze sprawozdania z egzaminu gimnazjalnego z 2014 roku; zapis EM 2017, że cytowany komentarz pochodzi ze sprawozdania z egzaminu maturalnego 2017.

wielu uczniom brakuje. […] Rozwiązując zadania z geometrii przestrzennej, uczniowie mieli też **problem z dobraniem modelu matematycznego do opisanej sytuacji i zauważenie związków między wielkościami**. […] Szczególnie dużo problemów mieli uczniowie, gdy sytuacja była przedstawiana w sposób nietypowy i należało dobrać odpowiedni algorytm do warunków opisanych w zadaniu. Potwierdzenia tej obserwacji dostarczają niewątpliwie rozwiązania zadania otwartego [*zad. 23 – przyp. aut.*] […]. Zdający, rozwiązując je, musieli wykazać się umiejętnościami przeprowadzenia prostego rozumowania matematycznego i użycia właściwej strategii. […] Trzech na czterech uczniów nie poradziło sobie z wyznaczaniem właściwych wielkości – nie znało wzorów na obliczenie: pola równoległoboku, długości okręgu czy objętości walca lub niepoprawnie przekształcało te wzory, a także popełniało błędy rachunkowe w trakcie obliczeń. (EG 2015, s. 75–76)

- Trudnością w tym zadaniu [*zad. 34 – przyp. aut.*], którą zdający musieli pokonać już na początku rozwiązania, było zapisanie równania z wykorzystaniem pola powierzchni bocznej ostrosłupa. Do pokonania zasadniczych trudności zadania było obliczenie wysokości ostrosłupa. Niektórzy zdający popełniali błędy rachunkowe, które obniżały ocenę rozwiązania, np. przy wyznaczaniu wysokości ostrosłupa […]. Zdarzały się rozwiązania, w których zdający traktowali pole powierzchni bocznej ostrosłupa jako pole jednej ściany […]. Wielu maturzystów błędnie interpretowało treść zadania, przyjmując, że jeśli wysokość ściany bocznej jest prostopadła do krawędzi podstawy, to ta ściana jest również prostopadła do płaszczyzny podstawy [*tu z pewnością wpływ na takie błędne rozumowanie miała niepotrzebna informacja o prostopadłości wysokości ściany bocznej do krawędzi podstawy – przyp. aut.*]. Z przedstawionych przykładów rozwiązania zadania 34 można wnioskować, że maturzyści mieli **duże trudności z interpretacją treści zadania** […] absolwenci szkół, kończących się maturą, mają **kłopoty z zadaniami ze stereometrii, wymagającymi wykorzystania wyobraźni przestrzennej i prawidłowego interpretowania pojęć, zwłaszcza w sytuacjach złożonych**. (EM PP 2017, s. 18–20)
- […] na poziomie podstawowym niski poziom wykonania mają również zadania 34. (21%) oraz 32. (22%), w których maturzyści musieli wykazać się umiejętnością zastosowania strategii wynikającej wprost z treści zadania. […] to nie opuszczenia wpłynęły na wskaźnik łatwości. Główną przyczyną niskich wyników był **brak całościowej koncepcji rozwiązania zadania, błędy w interpretacji tych zadań oraz brak funkcjonalnego opanowania pojęcia kątów w przestrzeni** […]. W poprawnym rozwiązaniu zadania, wymagającego umiejętności stosowania i tworzenia strategii, występują stałe elementy: **analiza zadania** (określenie relacji między wielkością poszukiwaną a danymi), **ustalenie kolejnych kroków prowadzących do rozwiązania** (ułożenie planu działania), **realizacja przyjętej strategii** i **zweryfikowanie wyniku**. Chodzi o to, aby zdający potrafił podzielić dany problem na kilka mniejszych problemów cząstkowych i nadał im taką strukturę, która pozwoli mu, w wyniku rozwiązania kolejnych problemów cząstkowych, rozwiązać wyjściowy problem. (EM PP 2020, s. 42)

Podsumowanie – dotyczące egzaminów gimnazjalnych 2012–2019 i maturalnych 2015–2022

- Propedeutyczne przygotowanie uczniów do postrzegania przestrzennego ma miejsce już w edukacji przedszkolnej i wczesnoszkolnej.
- Na podstawie przeglądu typów zadań w arkuszach zewnętrznych egzaminów gimnazjalnych 2012–2019 i maturalnych 2015–2022 można stwierdzić, że udział zadań z geometrii przestrzennej wahał się w granicach 8–13% wszystkich zadań w arkuszach. Wśród tych zadań z geometrii przestrzennej około 41% to zadania zamknięte.
- Zadania w arkuszach na ww. egzaminach zewnętrznych przygotowywano, opierając się na podstawie programowej z 2008 roku (z późniejszymi zmianami). W arkuszach uwzględniono wszystkie bryły, wymieniane w treściach nauczania podstawy, z przewagą graniastosłupów (łącznie z sześcianami i prostopadłościanami). Każde zadania dotyczyło jednej bryły. W nielicznych przypadkach występowały zadania, dotyczące dwóch brył (sześcian i ostrosłup, ostrosłup i walec, czworościan i kula, walec i półkula, stożek i kula).
- Najczęściej zadania dotyczące brył miały charakter standardowy i wymagały nieskomplikowanego rozumowania i obliczeń – stanowiły one 64,3% wszystkich zadań egzaminacyjnych z geometrii przestrzennej. W większości z nich należało wyliczyć objętość bryły lub długości krawędzi. Zadania te sprawdzały przede wszystkim „wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji" (18 zadań) oraz „użycie i tworzenie strategii" (25 zadań).
- Na egzaminie maturalnym PP i PR spośród zadań dotyczących brył aż 48,5% zadań (11 z PP i 5 z PR) wymagało wiedzy i umiejętności z postrzegania przestrzennego, ale też skorzystania z wiadomości z trygonometrii. Z kolei 3 inne zadania maturalne z PR wymagały nie tylko wiedzy dotyczącej brył, ale i wykorzystania rachunku pochodnych dla rozwiązania zagadnień optymalizacyjnych. Natomiast w zaledwie 3 zadaniach z poziomu PR wstępnymi danymi były przekroje brył.
- Brakowało na egzaminie maturalnym zadań z przekrojami, bryłami przeciętymi płaszczyzną, zadań z bryłami wzajemnie wpisanymi. Brakowało także zadań dotyczących brył, w których to zadaniach można by np. skorzystać z prostokątnego układu współrzędnych. Brak było też zadań z geometrii przestrzennej, w których zagadnienie można sprowadzić do płaszczyzny i przeanalizować (np. przekroje, odległości między odcinkami/płaszczyznami).
- Wskaźniki łatwości za rozwiązane zadania z geometrii przestrzennej były wyższe dla zadań zamkniętych niż dla zadań otwartych. Wszystkie zadania otwarte (23 zadania, czyli 41,1% wszystkich zadań egzaminacyjnych dotyczących brył) okazały się trudne dla uczniów, z tego 13 zadań (czyli 23,2%) ze wskaźnikiem łatwości do 30 p.p.
- Komentarze w sprawozdaniach z egzaminów zewnętrznych (gimnazjalnych i maturalnych) pokazują stopień przestrzennego postrzegania uczniów. W tych komentarzach o rozwiązywanych przez uczniów zadaniach z geometrii przestrzennej podkreśla się, że uczniowie mają niewystarczająco ukształtowaną wyobraźnię przestrzenną. Mają oni problem

z interpretacją treści zadania i w dostrzeganiu związków między wielkościami występującymi w zadaniu. Brakuje im umiejętności całościowego spojrzenia na zadanie. Trudności uczniom sprawia sfomułowanie koncepcji rozwiązania, stworzenie pewnej strategii rozwiązania – analiza zadania, ustalenie kolejnych kroków rozwiązania, wdrożenie przyjętej strategii i zweryfikowanie wyniku. Mają oni także problem w dobraniu właściwego modelu matematycznego do opisanej w zadaniu sytuacji.

W rekomendacjach zapisanych w sprawozdaniach – bardzo zbliżonych zresztą, jeśli chodzi o edukację przestrzenną w nauczaniu matematyki – zaleca się m.in.:

1. *Poświęcić więcej czasu i uwagi na ćwiczenia kształtujące wyobraźnię przestrzenną uczniów, np. poprzez wykonywanie różnorodnych modeli brył, układanie z klocków figur przestrzennych zgodnie z podanym schematem, rysowanie brył w oparciu o przedstawiony model, identyfikowanie kształtu brył na podstawie ich siatek lub rysunków wykonanych w różnej perspektywie*. [EG 2014]
2. *Szczególną uwagę w nauczania geometrii należy zwrócić na interpretację treści zadań i rozważanie właściwych figur geometrycznych*. […] *Absolwenci szkół, kończących się maturą, traktują matematykę, w tym także geometrię, jak zestaw gotowych algorytmów i procedur, których zastosowanie ma pomóc rozwiązać zadanie* […]. *Warto* […] *odchodzić w procesie nauczania od stosowania wyuczonych algorytmów lub przynajmniej pokazywać* […] *alternatywne ujęcie zagadnień*. [EM 2017]
3. *W trakcie procesu kształcenia nauczyciele powinni nadać duże znaczenie początkowej fazie rozwiązania zadania, tj. precyzyjnemu ustaleniu istoty rozwiązywanego problemu i rozumienia opisanej sytuacji*. […] *W nauczaniu geometrii należy zwrócić szczególną uwagę na poprawną interpretację treści zadań oraz rozważanie właściwych figur geometrycznych oraz ich elementów*. [EM 2020]

Komentarze, wnioski i rekomendacje ze sprawozdań dotyczących osiągnięć uczniów w ramach edukacji przestrzennej mogą stanowić przesłankę do wdrażania przez nauczycieli odpowiednich metod i działań w procesie nauczania–uczenia się, sprzyjających rozwojowi przestrzennego postrzegania przez uczniów otaczającej rzeczywistości, w której odnaleźć można wielość i złożoność brył oraz zachodzące relacje przestrzenne i przenikanie się geometrii płaskiej z geometrią przestrzenną.

Bibliografia

Informator o egzaminie gimnazjalnym od roku szkolnego 2011/2012, CKE Warszawa 2010 [z późniejszymi zmianami], https://cke.gov.pl/egzamin-gimnazjalny/informatory/ [dostęp: 22.06.2022].

Informator o egzaminie maturalnym z matematyki od roku szkolnego 2014/2015, CKE Warszawa 2013 – z późniejszymi zmianami.

Paczkowski J., *Continuum edukacji matematycznej (część I). Continuum, czyli ciągłość edukacji matematycznej w szkole podstawowej*, „Informator Oświatowy" ODN w Słupsku, nr 4/2021.

Paczkowski J., *Continuum edukacji matematycznej. Część II. Continuum, czyli ciągłość edukacji matematycznej w szkole ponadpodstawowej*, „Informator Oświatowy" ODN w Słupsku, nr 1/2022.

Paczkowski J., *Matematyczna przestrzeń edukacyjna – na podstawie egzaminu ósmoklasisty* [w:] *Rola społeczna diagnostyki edukacyjnej*, B. Niemierko, M.K. Szmigel (red.), PTDE, Kraków–Warszawa 2020.

Osiągnięcia uczniów kończących gimnazjum w roku 2014, CKE, Warszawa 2014.

Osiągnięcia uczniów kończących gimnazjum w roku 2015, CKE, Warszawa 2015.

Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 23 grudnia 2008 r. *w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz kształcenia ogólnego w poszczególnych typach szkół* (Dz.U. z 2009 roku nr 4, poz. 17) – z późniejszymi zmianami.

Sprawozdanie z egzaminu maturalnego 2017. Matematyka, CKE, Warszawa 2017.

Sprawozdanie za rok 2017. Egzamin maturalny. Matematyka, poziom podstawowy i rozszerzony, CKE, Warszawa 2020.