Jerzy Paczkowski
Ośrodek Doskonalenia Nauczycieli w Słupsku

Kreatywność uczniów - na przykładzie zadań matematycznych Pomorskiej Ligi Zadaniowej „Zdolni z Pomorza"

Abstrakt

Kreatywność uczniów, rozumiana jako twórczość, może przejawiać się również podczas rozwiązywania zadań – próba rozgryzienia problemu zawsze przebiega w kilku fazach (od refleksyjnej analizy w czasie przez przełomowe podjęcie decyzji co do wyboru strategii aż wreszcie po przedstawienie rozwiązania w określonej formie). W artykule pokażę, jak wyraża się (oj, niedobre określenie! ale inne nie przychodzi mi na myśl) kreatywność i pomysłowość uczniów – na przykładzie zadań matematycznych w Pomorskiej Lidze Zadaniowej. Jak różnorodne mogą być efekty tej twórczości, zaprezentuję na przykładzie zadań własnych, projektowanych i rozwiązywanych przez uczniów w ramach Pomorskiej Ligi Zadaniowej (PLZ). Zaproponowane uczniowskie zadania własne różnią się – pod względem treściowym, strukturalnym, ale też pod względem stopnia trudności. Zadania te są nieporównywalne, tym samym ich ocena wymaga podejścia bardziej uogólnionego. Czy możliwy jest „pomiar" twórczości uczniów (autorów tychże zadań)? Przedstawię tabelę z kryteriami oceny zadań.

Zadania prezentowane w artykule mają także pobudzić aktywność słuchacza/czytelnika oraz jego kreatywność.

***

Konkurs „Pomorska Liga Zadaniowa" (PLZ) realizowany jest już po raz czwarty, w ramach projektu *Zdolni z Pomorza*[1]. Obejmuje następujące dziedziny: biologia, chemia, matematyka, fizyka, informatyka oraz przedmioty rozwijające kompetencje społeczne. Koordynatorem zadań konkursu jest Ośrodek Doskonalenia Nauczycieli w Słupsku.

[1] W latach 2010–2013 realizowany był w województwie pomorskim projekt innowacyjny *Pomorskie – dobry kurs na edukację. Wspieranie uczniów o szczególnych predyspozycjach w zakresie matematyki, fizyki i informatyki*. Stanowił on część przedsięwzięcia strategicznego pod nazwą Zdolni z Pomorza, obejmującego działania realizowane przez samorządy powiatowe, szkoły wyższe, Samorząd Województwa Pomorskiego. Wsparcie uczniów szczególnie uzdolnionych realizowane było i jest w ramach Lokalnych Centrów Nauczania Kreatywnego (LCNK), koordynowanych przez Centrum Edukacji Nauczycieli w Gdańsku, które pełni funkcję Regionalnego Centrum Nauczania Kreatywnego (RCNK). Na bazie doświadczeń z projektu kontynuowane są jego założenia w ramach Regionalnego Programu Operacyjnego Województwa Pomorskiego na lata 2014–2020. Patrz: https://zdolnizpomorza.pl/index.php/opis-projektu [dostęp: 28.06.2020].

W każdej z ww. dziedzin konkurs jest 3-etapowy (etap szkolny – kwalifikacyjny, etap powiatowy i etap wojewódzki)[2]. Regulamin konkursu przewiduje, że etap powiatowy polega na samodzielnym rozwiązywaniu zadań w domu przez uczniów zakwalifikowanych do etapu powiatowego, które to rozwiązania uczniowie przesyłają elektronicznie do organizatorów konkursu. Ponadto uczniowie zakwalifikowani do etapu wojewódzkiego mają szansę „wzmocnić" swoją pozycję punktową, przygotowując propozycję własnego zadania wraz z przykładowym rozwiązaniem, zwanego w regulaminie „zadaniem dodatkowym". Punktacja za to zadanie jest doliczana do punktów uzyskanych na etapie wojewódzkim.

Laureaci i finaliści etapu wojewódzkiego spotykali się na uroczystej gali „Zdolnych z Pomorza", podczas której wręczono im nagrody i dyplomy[3].

Próba zdefiniowania pojęcia kreatywności

Z próbą zdefiniowania kreatywności jako pewnego procesu twórczego spotykamy się już w latach dwudziestych XX wieku – jeden z pierwszych modeli procesu twórczego zaproponował G. Wallas (opierając się na koncepcji fizyka Hermanna von Helmholtza)[4]. W modelu tym sformułowano pięć etapów kreatywnego rozwiązywania problemów:

- przygotowanie lub definiowanie problemu,
- inkubacja, czyli czas, w jakim rozważany jest dany problem,
- moment uświadomienia sobie, że nastąpi/następuje przełom, czyli moment odnalezienia czasoprzestrzennej płaszczyzny odniesienia,
- oświecenie lub moment głębokiego zrozumienia, w czym tkwi istota zdefiniowanego problemu i jego rozwiązania,
- wreszcie weryfikacja dotychczasowej koncepcji rozwiązania i testowanie pomysłu.

Można dostrzec pewną ciągłość w poszukiwaniu odpowiedzi na pytanie o kreatywną i twórczą postawę uczniów – (1) prace Johna Deweya na temat rozwiązywania problemu, (2) model procesu twórczego Grahama Wallasa (1926), (3) badania Wincentego Okonia dotyczące teorii problemowego nauczania–uczenia się, (4) badania Edwarda Nęcki na gruncie polskim, dotyczące psychologicznych aspektów procesu twórczego.

Problematyką uwarunkowań rozwoju kreatywności uczniowskiej, rozumianej jako twórczość uczniów, od lat na gruncie polskich badań zajmuje się Krzysztof J. Szmidt. We wstępie do publikacji *Edukacyjne uwarunkowania*

[2] Regulamin konkursu – patrz: https://www.odn.slupsk.pl/files/userfiles/Inne/PZL_regulamin19_20_sp.pdf [dostęp: 28.06.2020]; udział uczniów w konkursie PLZ – patrz: https://www.odn.slupsk.pl/doskonalenie-oferta-szkolen/szkolenia/przedmioty-matematyczno-przyrodnicze/konkursy-wydarzenia-4/pomorska-liga-zadaniowa-zdolni-z-pomorza/ [dostęp: 29.06.2020].

[3] O gali „Zdolni z Pomorza" – patrz: https://zdolnizpomorza.pl/index.php/pomorska-liga-zadaniowa/421-laureaci-pomorskiej-ligi-zadaniowej-nagrodzeni [dostęp: 29.06.2020].

[4] A. Szóstek, *Wszyscy jesteśmy kreatywni: wymogi wstępne i elementy procesu twórczego* [w:] J. Fazlagić (red.), *Kreatywność w systemie edukacji*, FRSE, Warszawa 2019, s. 25 i nast.

rozwoju kreatywności[5] K.J. Szmidt wymienia liczne prace doktorskie i habilitacyjne, jak też publikacje tematyczne, które dotykają zagadnień związanych z twórczością i pomocą w jej rozwijaniu (pomoc w tworzeniu). Zespół badaczy przy Uniwersytecie Łódzkim postrzega

> [...] kreatywność jako osobowy (personalistyczny) wymiar twórczości, będący złożoną syntezą cech poznawczych, emocjonalnych, motywacyjnych oraz zdolności praktycznych jednostki. W ich przekonaniu kreatywność to nazwa postawy twórczej, w której myślenie twórcze, motywacja protwórcza oraz działania innowacyjne i zaradność znajdują się w harmonijniej równowadze. Twórczość opisywać i badać można we wszystkich jej czterech aspektach: atrybutywnym, procesualnym, personologicznym i ekologicznym. Dla pedagogiki twórczości szczególne znaczenie ma ten ostatni aspekt, który dotyczy właściwości środowiska wychowawczego stymulującego rozwój zdolności twórczych i postaw innowacyjnych[6].

Zagadnieniom związanym m.in. z diagnozowaniem twórczości uczniów poświęcona była XXII Konferencja Diagnostyki Edukacyjnej w 2016 roku[7].

Pomorska Liga Zadaniowa – uczniowskie zadania własne (dodatkowe) a „pomiar" twórczości

Dla przypomnienia – zadanie dodatkowe (zwane: własne) jest przygotowywane przez uczniów zakwalifikowanych do etapu wojewódzkiego Pomorskiej Ligi Zadaniowej. Jest to propozycja samodzielnie sformułowanego pod względem treści zadania wraz z podanym rozwiązaniem. Zadaniem tym – a jest ono punktowane – uczeń jakby zwiększa swoje szanse na podwyższenie ostatecznego wyniku tego etapu. Obszar problemowy zadania jest podawany do każdej edycji konkursu.

Organizatorzy konkursu PLZ (w sześciu dziedzinach) zakładają samodzielność uczniów w budowaniu zadań własnych. Zawsze można porównawczo odnieść się do wyników ucznia na etapie szkolnym i wojewódzkim – oczywiście nie ma to wpływu na samą ocenę przysyłanych zadań.

W odniesieniu do twórczości „pomiar" to nieadekwatne określenie co do samej istoty procesu tworzenia. Określenie „pomiar" rozumiem i stosuję niejako funkcjonalnie, jako ramy tzw. ideału, do którego spełnienia dążyć powinni uczniowie przygotowujący propozycje zadań na Pomorską Ligę Zadaniową. „Ideał" wyznaczony jest pewnymi uwarunkowaniami i zakresem punktowym. Punkty pozwalają na wyliczenie wskaźnika poziomu twórczości – w tym przypadku zaproponowanego zadania własnego (dodatkowego). Oczywiście wskaźnik poziomu twórczości, aczkolwiek w pewnym stopniu pomocny, z natury jest subiektywny, bowiem różnorodne efekty twórczego działania uczniów w tym obszarze kompetencji matematycznych są nieporównywalne. Ma on charakter orientacyjny – przydatny w obserwacji tendencji w kreatywnej twórczości zadaniowej uczniów na przestrzeni wieloletniej.

[5] K.J. Szmidt, *Edukacyjne uwarunkowania rozwoju kreatywności*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź 2017; praca zawiera wybór artykułów z dorobku badawczego autora.

[6] Tamże, s. 12 i nast.

[7] *Diagnozowanie twórczości uczniów i nauczycieli*, B. Niemierko, M.K. Szmigel (red.), PTDE, Kraków 2016.

W ostatnich dwóch edycjach konkursu PLZ przyjęto kryteria oceny zadania samodzielnego przedstawione w tabeli 1.

Tabela 1. Kryteria oceny własnego zadania z matematyki

Lp.	Kryterium	Liczba punktów
1.	Zgodne z wykazem treści	0 – niezgodne z zakresem treści 1 – zgodne z zakresem treści
2.	Treść zadania przedstawia ciekawą własność, ma zaskakujące rozwiązanie, jest zagadką rachunkową lub logiczną	0 – jeśli treść zadania jest „szkolna" (typowa lub podobna do zadań wykonywanych na lekcji) 1 – jeśli zadanie jest ciekawe, mało „szkolne"
3.	Przedstawione rozwiązanie jest jasne i kompletne	0 – gdy wyłącznie jest zapis wzorów, bez komentarza lub gdy nie wiadomo, jakie i skąd rozumowanie 1 – gdy rozwiązanie jest przedstawione całościowo i przejrzyście 2 – gdy rozwiązanie jest ciekawe, oryginalne, z pełnym uzasadnieniem, opatrzone szerokim komentarzem
4.	Podane są co najmniej dwa sposoby rozwiązania	0 – gdy jest 1 rozwiązanie 1 – gdy są 2 rozwiązania, bazujące na tej samej metodzie 2 – gdy są co najmniej 2 rozwiązania o różnym podejściu do strategii rozwiązania i różnych metodach
5.	Rozwiązanie wymaga pomysłu/ stworzenia własnej strategii/ jest opatrzone komentarzem matematycznym	0 – rozwiązanie standardowe, „szkolne" 1 – rozwiązanie pomysłowe, w którym widać koncepcję/strategię rozwiązania 2 – rozwiązanie pomysłowe, z własną oryginalną i pomysłową strategią
6.	Zadanie jest kilkuetapowe	0 – zadanie „monotematyczne", wymaga doprowadzenia do jednej odpowiedzi 1 – zadanie wieloczęściowe (z podpunktami) lub którego rozwiązanie czerpie z różnych obszarów matematyki (np. geometria i prawdopodobieństwo; geometria i układ współrzędnych)
7.	Forma edytorska zadania (zapis, rysunki)	0 – standardowa prezentacja rozwiązania (może być pisemna lub druk) 1 – rozwiązanie wsparte grafiką i wyraźnie dzielone na części

Tak zwana podwójna liczba punktów przyznawana jest za twórcze i pomysłowe rozwiązania zadania (problemu) – jasne i kompletne rozwiązanie, co najmniej dwa sposoby rozwiązania, oryginalna strategia rozwiązania.

Jak wygląda wskaźnik spełnienia ram „ideału" przez proponowane uczniowskie zadania dodatkowe, wraz z rozwiązaniami, przedstawiają wskaźniki z ostatnich dwóch edycji PLZ przedstawione w tabeli 2.

Tabela 2. Wskaźniki spełnienia kryteriów oceny własnego zadania z matematyki

	Zgodność z zakre-sem [0–1 p.]	Ciekawe [0–1 p.]	Jasne i kompletne rozwiązanie [0–2 p.]	Co najmniej 2 sposoby rozwiązania [0–2 p.]	Pomysł, własna strategia, komentarz [0–2 p.]	Zadanie kilkuetapowe	Forma edytorska (zapis, rysunki) [0–1 p.]	RAZEM PUNKTÓW [0–10 p.]
SP 2018/2019	1,00	0,76	0,51	0,46	0,50	0,11	0,64	0,54
SP 2019/2020	1,00	0,65	0,53	0,34	0,47	0,24	0,78	0,54
Pg 2018/2019	1,00	0,76	0,67	0,48	0,62	0,10	0,52	0,59
Pg/Pp 2019/2020	1,00	0,80	0,40	0,43	0,53	0,60	0,73	0,59

Daje się zauważyć pewne pozytywne zmiany w propozycji zadań wszystkich uczniów:

- forma edytorska zadania (zapis komputerowy, grafika, wykorzystanie aplikacji graficznych) poprawia się,
- utrzymuje się wysoki wskaźnik u uczniów szkół ponadgimnazjalnych i ponadpodstawowych (z nieznaczną tendencją wzrostową) w kryterium określającym, czy zadanie jest ciekawe i dotyka obszarów pozaszkolnej wiedzy matematycznej,
- zdecydowanie wzrósł u uczniów szkół ponadgimnazjalnych i ponadpodstawowych wskaźnik, który premiuje wieloetapowość problemu i wykorzystanie zagadnień z pokrewnych działów matematyki.

Elementy kreatywności – na przykładzie uczniowskich zadań własnych (dodatkowych)

Pokażę na kilku przykładowych zadaniach [treść i zapis oryg. – przyp. J.P.], na ile twórcze są propozycje uczniów, czy wielowarstwowe konstrukcje zadań można określić jako twórcze, czy obudowanie w inną treść zadania może być twórcze.

a) Zadanie ekologiczne o konstrukcji wielowarstwowej

PLZ 2019/2020 – SP (zadanie własne ucznia)

Kartki A4 są składowane w prostopadłościennych pudełkach po 500 sztuk. Objętość jednego pudełka wynosi 3150 cm^3 . Pole całkowite [pudełka – przyp. J.P.] to 354-krotność wysokości. Pole dwóch podstaw to 1260 cm^2, a dwóch różnych ścian bocznych – 255 cm^2 . Wysokość pudełka jest równa wysokości wszystkich kartek. Obwód podstawy jest równy 102 cm.

a. Podaj grubość 10 000 kartek.
b. Jeśli jedno drzewo daje 60 kg papieru, a jeden kilogram 200 sztuk kartek, to ile drzew trzeba wyciąć, aby stworzyć 100 000 kartek?

c. Ile ryz z kartkami użyje człowiek przez całe swoje życie, jeżeli rocznie używa 320 kg papieru i zmarł w wieku 80 lat? Ile litrów będą miały te ryzy?
d. Jedno drzewo tworzy tlen dla 3 osób. Ile osób 'traci dostęp' do tlenu każdej doby, jeżeli w ciągu 5 minut ludzie na całym świecie tworzą 200 ton papieru?

Zadanie sprowadza się do wielu obliczeń, m.in. z wykorzystaniem równań lub układu równań, aby wyliczyć grubość jednej kartki. Każdy następny krok to próba przeprowadzenia rozumowań, które będą dawały odpowiedź na poszczególne pytania.

Nie weryfikowano, czy informacja związana z zużyciem papieru przez człowieka w ciągu jego życia lub zużycie papieru przez ludzkość w ciągu 5 minut są policzalne poprawnie (zgodnie z rzeczywistością) i czy rzeczywiście drzewo tworzy tlen dla 3 osób. Zadanie ma jednak charakter emocjonalny i posiada przesłanie ekologiczne (klimatyczne). Natomiast końcowa konkluzja, wynikająca z zadania, że w ciągu doby aż 2 880 000 osób „traci dostęp" do tlenu jest porażająca. I w tym można dostrzec dodatkową wartość zadania.

b) Zadanie ekonomiczne o konstrukcji wielowarstwowej

PLZ 2019/2020 – SP (zadanie własne ucznia)

Pewien rolnik uprawiał marchewkę na polu o kształcie prostokąta, którego całkowita powierzchnia wynosiła 18 000 m^2. Rzeczywistą powierzchnię upraw zmniejszał strumień szeroki na 2 m, przecinający pole, odcinający z powierzchni pola trójkąt równoramienny o bokach ½ długości krótszego boku pola. Każdego roku, jeśli urodzaj dopisywał, rolnik z każdego m^2 uprawnej roli zbierał 60 kg marchewki, którą oddawał do skupu w cenie 0,50 zł/kg. Niestety apetyt na jego dorodne zbiory dopisał także królikom, które spustoszyły mniejszą część pola odciętą przez strumień, zjadając 50% zbiorów, jakie spodziewał się zebrać rolnik. Po zebraniu marchewki z mniejszego pola okazało się, że zebrano 54 000 kg marchewek.

Rozwiąż zadanie udzielając odpowiedzi:

a. Ile ciężarówek do transportu marchewki powinien zamówić rolnik, jeśli każda ma ładowność 20 000 [kg]?
b. O ile większe byłyby zbiory rolnika, gdyby przez jego działkę nie przepływał strumień, a króliki nie zjadłyby części zbiorów?
c. Czy pomimo mniejszych zbiorów środki rolnika uzyskane ze sprzedaży marchewki pozwolą mu na zbudowanie wokół całej działki ogrodzenia odpornego na podkopy królików w cenie 280 [PLN/m], jeśli środki pozyskane z funduszy Unii Europejskiej dofinansują 40% inwestycji?

Z punktu widzenia ekonomicznego nie do końca poprawnie podano definicję „zysku" (właściwie wcale nie podano). Po prostu pozyskane fundusze ze zbioru marchewki miały być przeznaczone na ogrodzenie pola. A gdzie tzw. proza życia, czyli pieniądze „na spożycie"? No i w wyliczeniu środków ze sprzedaży marchewek nie uwzględniono faktu, że wynajem ciężarówek też kosztuje. Co jest pewnym uproszczeniem lub niedopatrzeniem, ale oczywiście nie umniejsza wartości zadania.

c) Zadanie-kalka

PLZ 2019/2020 – SP (zadanie własne ucznia)

Dwóch ogrodników sadzi kwiaty w ogrodzie – pierwszy sadzi róże, drugi tulipany. Pierwszy ogrodnik zasadzi cały ogród w ciągu 6 godzin, a drugi w ciągu 8. Rano postanowiono zasadzić ten cały ogród. Najpierw przez 2 h pracował pierwszy ogrodnik, potem przez 1 h drugi. W międzyczasie zauważono, że ptaki wyjadają nasiona. Ptaki zjadły nasiona z 3/12 powierzchni ogrodu, przez cały czas sadzenia kwiatów. Wstrzymano sadzenie i postawiono stracha na wróble, a następnie przystąpiono ponownie do sadzenia kwiatów. Dla przyspieszenia sadzenia kwiatów pracowało dwóch ogrodników jednocześnie i dodatkowo pomagała właścicielka ogrodu. Łącznie sadzenie całego ogrodu trwało 4 h i 35 minut, nie licząc przerwy na zamontowanie stracha na wróble.

Jakie było tempo sadzenia ogrodu przez jego właścicielkę?

Ile czasu trwałoby sadzenie pustego ogrodu jednocześnie przez dwóch ogrodników? A ile, gdyby jednocześnie sadziło ogród dwóch ogrodników i właścicielka ogrodu?

Pomijając poprawność językową, a sadzenie ogrodu to taki skrót myślowy od „sadzenie kwiatów, czyli róż i tulipanów, w ogrodzie", mamy w zadaniu informację o przerwie w pracy. Dla konstruktora zadania czas jej trwania jest nieistotny, bo nie wykorzystuje tej informacji w dalszej części zadania. Problemem natomiast jest wyjadanie nasion przez drobne ptaki. A przecież tymi nasionami są sadzonki róż i cebulki tulipanów[!]. Jednak koncepcja i struktura zadania zachowują pewną spójną całość.

Do rozwiązania zadania niekoniecznie trzeba było wykorzystać wiedzę na temat proporcjonalności prostej czy odwrotnej. Pojęcie tempa pracy podane jako czas pracy każdego ogrodnika z osobna w całym ogrodzie jest bardziej bliskie prawdy i praktyczne.

Jednak propozycja uczniowska przypomina konkursowe zadanie z etapu powiatowego.

PLZ 2019/2020 – SP (etap powiatowy)

Do basenu doprowadzana jest woda dwoma kranami – jednym z wodą zimną, a drugim z wodą podgrzaną. Basen napełnia się wodą zimną w ciągu 5 godzin, a wodą podgrzaną w ciągu 8 godzin. W ciągu dnia pusty dotąd basen postanowiono napełnić. Najpierw basen napełniano przez 2 godziny wodą zimną, potem przez 1 godzinę wodą podgrzaną. W międzyczasie zauważono nieszczelność w zaworze odpływu wody z basenu – woda odpływała w tempie 1/10 objętości basenu na godzinę, przez cały czas napełniania go wodą. Wstrzymano napełnianie basenu wodą, uszczelniono odpływ wody, a następnie przystąpiono ponownie do napełniania basenu. Dla przyspieszenia napełniania basenu wlewano wodę z obu kranów i dodatkowo wężem z kranu ogrodowego. Łącznie napełnienie całego basenu trwało 5 godzin 4 minuty, nie licząc przerwy na naprawę zaworu odpływu.

Jakie było tempo napełniania basenu wężem z kranu ogrodowego? Ile czasu trwałoby napełnianie pustego basenu jednocześnie wodą podgrzaną i wodą zimną? A ile, gdyby jednocześnie napełniano basen wodą podgrzewaną, wodą zimną i wodą z węża ogrodowego? Przedstaw swój tok rozumowania i obliczenia.

Czy zadanie, będące kalką, umniejsza jego wartość? Czy twórczość – będąca szczególnym przypadkiem naśladownictwa – może być mniej wartościowa?

d) Zadanie astronomiczne

PLZ 2019/2020 – SP (zadanie własne ucznia)

Wokół nieruchomej gwiazdy G poruszają się po swoich orbitach w kształcie okręgów leżących w tej samej płaszczyźnie dwie planety: M i Z. Planeta Z, krążąca dalej od gwiazdy G niż planeta M, posiada księżyc K krążący wokół niej po okręgu leżącym również w tej samej płaszczyźnie co orbity obu planet. Wszystkie ciała niebieskie poruszają się po swoich orbitach zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Planeta M obiega gwiazdę G w czasie 1 roku, natomiast planeta Z krąży 10 razy wolniej (przyjmujemy, że wszystkie lata są nieprzestępne).

W dniu 12.03.2020 roku planety wraz z księżycem ustawiły się w jednej linii tak, że odległość pomiędzy planetą M a księżycem K była największa z możliwych i wynosiła 209,76 mln km. Wiemy również, że minimalna odległość pomiędzy tymi samymi ciałami niebieskimi w innym ustawieniu może wynosić 88,24 mln km. Po 9125 dniach ciała niebieskie ustawiły się w taki sposób, że odległość księżyca K od planety M wynosiła 160 mln km i jednocześnie jego odległość od gwiazdy G była najmniejsza z możliwych.

Wyznacz z dokładnością do 1000 km promienie i długości orbit wszystkich poruszających się ciał niebieskich.

Interpretacja treści zadania wskazuje, że w zadaniu chodzi o nasz Układ Słoneczny – G to Słońce, M to Merkury, Z to Ziemia, K to Księżyc. Uproszczenie odnośnie do orbit planet i księżyca było konieczne do obliczeń, z wykorzystaniem danych liczbowych i wzorów związanych z okręgami.

Rozwiązanie wsparto rysunkami, obrazującymi sytuacje przedstawione w zadaniu. Prowadzone obliczenia uwzględniły dane liczbowe z zadania. Wyliczone długości promieni orbit planet M i Z są bliskie rzeczywistym. Natomiast długość promienia księżyca K jest dwukrotnie większa od rzeczywistej. Niezgodność wynika z zaprezentowanego rozwiązania – błąd przy dzieleniu 9125 dni przez 365 dni w roku ziemskim. Z obliczeń wynika, że Ziemia okrążyła Gwiazdę 25 razy – wróciła do pierwotnego położenia w przestrzeni, natomiast autor rozwiązania „przyjął” z błędnego obliczenia, że było to tylko 2,5 obrotu.

Jednakże samo potraktowanie tematu, odniesienie do rzeczywistych odległości w przestrzeni kosmicznej i załączona staranna grafika stanowią twórczą wartość dodaną.

e) Zadanie magika, czyli zadanie „pudełkowe"

PLZ 2018/2019 – Pg (zadanie własne ucznia)

W pięciokąt foremny o boku długości *x* wpisano okrąg, a następnie narysowano okrąg O_1 styczny zewnętrznie do okręgu wpisanego oraz styczny do dwóch boków pięciokąta. Na tym samym pięciokącie opisano okrąg i narysowano okrąg O_2 styczny wewnętrznie do okręgu opisanego oraz styczny zewnętrznie do okręgu wpisanego w pięciokąt.

a. Oblicz stosunek p promienia okręgu O_1 do promienia okręgu O_2.
b. Oblicz:
$$S = lim_{n\to\infty}(1 + p + p^2 + \cdots + p^n)$$
c.
$$f(x) = \frac{x^{(S+1)\frac{3-\sqrt{5}}{8}-1}}{x^{\left[\frac{1}{p}\right]}+1}$$
Wykaż, że funkcja *f* jest malejąca w swojej dziedzinie.

Kiedy już zobrazowano sytuację, wynikającą z informacji danych w zadaniu, można było na drodze żmudnych obliczeń wyliczyć wartość *p*, czyli stosunek promienia okręgu O_1 do promienia okręgu O_2. Zadanie więc rozwiązane! Ale niczym wyciąganie przedmiotów z cylindra magika, nie koniec na tym – masz już to COŚ, to może znajdziemy w tym cylindrze coś jeszcze, wykorzystując wcześniej otrzymane COŚ.

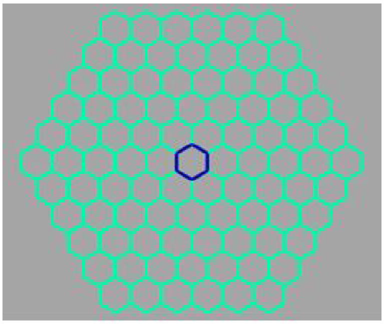
Zadanie dotyczy geometrii płaskiej, ale w konsekwencji jest „wielodziałowe". Rozwiązujący zmienia swój ogląd obszaru matematycznego, przechodzi do innego działu, na inny poziom, jakby do innego „schowka", którego zawartość pozwoli rozwiązać problem.

f) Zadanie szczęśliwego leśnika

PLZ 2018/2019 – Pg (zadanie własne ucznia)

W sztucznym lesie w kształcie plastra miodu zbudowanego z 91 sześciokątów foremnych (patrz: rys. 1) rosną wierzby. Na początku sadzi się 81 „wierzb płaczących" i 10 „wierzb szczęśliwych". Jeśli płacząca wierzba styka się krawędziami z trzema lub więcej wierzbami szczęśliwymi, to też staje się szczęśliwa. Wykaż, że nie da się tak posadzić wierzb szczęśliwych, by wszystkie drzewa stały się wierzbami szczęśliwymi.

Rysunek jest tu bardzo potrzebny, bo lepiej ilustruje problem. Wokół jednego sześciokąta (centralnego) „przyklejano" bokami pozostałe 90 sześciokątów, szczelnie wypełniając powierzchnię lasu – najpierw pierwsza warstwa, potem do tejże kolejna warstwa itd. W ten sposób otrzymano obszar sztucznego lasu, przypominający w zewnętrznym obrysie sześciokąt, którego zewnętrznym obwodem jest łamana, tworzona przez krawędzie małych sześciokątów. W środku każdego sześciokątnego obszaru sadzono wierzby – „płaczące" i „szczęśliwe".



Rysunek 1. Zadanie szczęśliwego leśnika – sztuczny las

Zadanie nie jest łatwe do rozwiązania, aczkolwiek ciekawe i wciągające. Istotny jest proces „zarażania się" wierzb szczęśliwością. Konieczne jest tu rozpatrzenie kilku przypadków położenia jednej wierzby „szczęśliwej" względem otaczających ją wierzb „płaczących".

g) Zadanie „powalające"

PLZ 2019/2020 – Pg (zadanie własne ucznia)

Dane są kolejno liczby R_0, R_1, R_2, ... Liczba $R_0 = 1$, a każda kolejna liczba jest sumą dwóch losowych liczb poprzednich (np. $R_1 = R_0 + R_0$, gdyż R_0 jest jedyną liczbą poprzedzającą R_1). Wyznacz $E(R_n)$.

Rozwiązanie 1. Zacznijmy od wykazania przydatnego lematu: […]

[Tu następuje sformułowanie lematu i krótki jego dowód. Lemat będzie wykorzystany do wyznaczenia $E(R_n)$ – przyp. J.P.]

Jest to zadanie rodzynek – szczęśliwie jedno z nielicznych o charakterze olimpijskim. Autorem jego jest uczeń jednego z elitarnych liceów województwa pomorskiego. W latach poprzednich także przysyłał podobnie „wyśrubowane" zadania, ale rozwiązania tamtych zadań można było prześledzić, odnaleźć pewne nieścisłości lub niedopowiedzenia, sformułować uwagi czy zaproponować inne podejście.

Tym razem trzeba było prosić o recenzję i ocenę zadania specjalistę, profesora uczelnianego.

Próba podsumowania – czyli ile kreatywności uczniów...

Przedstawiłem kilka zaledwie zadań spośród blisko 150 zadań z ostatnich 3 lat.

W założeniach konkursowych Pomorskiej Ligi Zadaniowej chodziło o wyłonienie grupy uzdolnionych uczniów w gimnazjum, w ostatnich dwóch klasach szkoły podstawowej oraz w szkołach ponadpodstawowych/ponadgimnazjalnych.

„Środkiem" takiego procesu miał być konkurs, który by sprawdzał umiejętność rozwiązywania zadań, wymagających twórczego podejścia do problemu. Natomiast idea uczniowskiego zadania własnego (dodatkowego) dawała szansę uczniom wykazania się określonymi preferencjami i zainteresowaniami matematycznymi. Oczywiście, prócz ciekawych, oryginalnych i pomysłowych zadań uczniowskich były też i takie typowo szkolne, bardziej lub mniej rozbudowane. Jednakże nie do przecenienia jest twórcza wartość wszystkich nadsyłanych uczniowskich zadań własnych – każda próba sformułowania problemu wyzwala u uczniów chęć zmierzenia się z nim, gotowość do refleksji i poszukiwań odpowiednich narzędzi, niekoniecznie z obszaru wiedzy i umiejętności matematycznych, chęć odnotowania swoich przemyśleń w formie rozwiązania zadania/problemu.

Dobrze to nawiązuje do poglądó w Johna Deweya, który uważa, że:

- rozbudzenie ciekawości sprzyja zdobyciu zasobu doświadczeń i faktów, z których nasuwają się pomysły;
- szybkość nasuwania się pomysłów, ich różnorodność, głębia i obfitość dają okazję do interpretacji i przewidywania skutków, wyboru lepszej opcji;
- Wprowadzenie ładu w nasuwające się pomysły, czyli ułożenie we wzajemnym odniesieniu do siebie i do faktów, na których się opierają, doprowadza do ciągłości myśli i możliwość oceny stosowności pomysłów[8].

Na koniec zadanie konkursowe i jego rozwiązanie rodzynek.

PLZ 2017/2018 –SP (etap wojewódzki)
Woźnica siedzący na przodzie załadowanego wozu zauważył, że z tyłu wozu rozluźnił się łańcuch. Zszedł z wozu i poszedł na jego koniec, przy czym wóz jechał dalej z tą samą prędkością. Idąc do końca wozu, woźnica wykonał 8 kroków. Umocował łańcuch i wrócił z powrotem na przód wozu. W trakcie naprawy wóz jechał stale naprzód, więc woźnica w drodze powrotnej, od momentu rozpoczęcia naprawy do powrotu na przód wozu, wykonał aż 24 kroki. Oblicz długość wozu mierzoną w krokach, przy założeniu, że woźnica stawia kroki tej samej długości.

A oto rozwiązanie ucznia [zapis oryginalny – przyp. J.P.]:

Aby wyrównać obie strony, musimy odjąć: 24 – 8 = 16
Następnie dwukrotnie podzielić tę liczbę na pół:
16 : 2 = 8, 8 : 2 = 4
Na końcu dodać otrzymane cyfry
8 + 4 = 12
Odp.: Wóz ma długość 12 kroków.

Odpowiedź jest poprawna! Ale jak wykazać poprawność w rozumowaniu ucznia?

Miłych i twórczych rozważań.

[8] Za: K. Kołodziej, *Wyzwalanie kreatywności matematycznej w uczniach* [w:] B. Niemierko, M.K. Szmigel (red.), *Diagnozowanie twórczości uczniów i nauczycieli*, PTDE, Kraków 2016, s. 493 i nast.