

Jerzy Paczkowski

Ósrodek Doskonalenia Nauczycieli w Słupsku

Matematyczna przestrzeń edukacyjna – na podstawie egzaminu ósmoklasisty

Abstrakt

Problematyka zasygnalizowana w artykule przedstawiona zostanie dwutorowo:

- Matematyczna Przestrzeń Edukacyjna,
- wyniki egzaminu ósmoklasisty.

Matematyczna Przestrzeń Edukacyjna – z racji samej definicji – ma strukturę trójwymiarową, którą tworzą działy matematyki, kompetencje matematyczne i czas realizacji. W relacji „Matematyczna Przestrzeń Edukacyjna a podstawa programowa” możemy pólosiom dodatnim, wzajemnie prostopadłym w płaszczynie poziomej odpowiednio przypisać elementy podstawy programowej, czyli: $[w]$ treści nauczania z matematyki (wymagania szczegółowe), z podziałem na obszary tematyczne, działy, $[u]$ kluczowe umiejętności, kompetencje matematyczne (wymagania ogólne), oraz pionowej półosi dodatniej $[k]$ czas określony przez cykl edukacyjny w klasach 4–8 szkoły podstawowej. Treści kształcenia matematycznego (wynikające z podstawy programowej 8-letniej szkoły podstawowej), które z każdym rokiem edukacyjnym są poszerzane, doprecyzowane, uzupełniane, pozostają w relacji z uogólnionymi umiejętnościami kluczowymi. Te umiejętności wyrażone są w postaci wymagań ogólnych edukacji matematycznej w szkole podstawowej. Mają zhierarchizowaną strukturę: (I) Sprawność rachunkowa, (II) Wykorzystanie i tworzenie informacji, (III) Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji, (IV) Rozumowanie i argumentacja. Czy ta hierarchia ma swój odpowiednik, np. w taksonomii ABC celów poznawczych zaproponowanej przez Bolesława Niemierkę?

Przeanalizujemy relacje między zakresem treściowym podstawy programowej z matematyki w 8-klasowej szkole podstawowej a dostępnymi materiałami, związanymi z przygotowaniem uczniów do egzaminu ósmoklasisty – na ile spełniają one oczekiwania nauczycieli matematyki, ale także autorów podstawy programowej (jako płaszczynę odniesienia przyjmujemy treści nauczania zawarte w podstawie programowej). Czy materiały informacyjne i ćwiczeniowe, ogólnodostępne na stronach CKE i OKE, w których to materiałach zadania są sparametryzowane (podane wymagania ogólne i treści nauczania, kryteria oceniania), oraz arkusze egzaminu ósmoklasisty z dwóch lat, także sparametryzowane i wsparte wynikami egzaminu, spełniają funkcję informacyjno-wspierającą pracę nauczycieli? Analiza arkuszy egzaminacyjnych i materiałów pozwoli określić, w jakim stopniu wypełniają one Matematyczną Przestrzeń Edukacyjną.

Natomiast wyniki egzaminów ósmoklasisty 2019 i 2020 – z uwzględnieniem struktury podstawy programowej z matematyki (wymagania ogólne i treści nauczania a umiejętności kluczowe) – dadzą informację, w jakim stopniu elementy tej przestrzeni zostały opanowane przez uczniów.

Słowa kluczowe: Matematyczna Przestrzeń Edukacyjna, podstawa programowa, treści nauczania (cele szczegółowe), wymagania ogólne (cele kształcenia), matematyczne umiejętności kluczowe (wymagania ogólne), wiedza (wiadomości i umiejętności), trwałość wiedzy (wiadomości i umiejętności), taksonomia celów poznawczych ABC, program nauczania i treści programowe, funkcjonalna rola matematyki w przedmiotach przyrodniczych

Treści nauczania w podstawie programowej

O edukacji matematycznej i ciągłości nauczania w tym obszarze można mówić z poziomu każdego etapu edukacyjnego – w przedszkolu, w klasach 1–3 i 4–8 szkoły podstawowej¹ oraz w szkole ponadpodstawowej/ponadgimnazjalnej. Nie sposób na kolejnym etapie edukacyjnym nie uwzględnić wkładu i osiągnięć wcześniejszych lat w nauczaniu–uczeniu się matematyki. Trawestując, można powiedzieć, że takie będą sukcesy matematyczne, jakie ich przygotowanie – relacje i zależności między kolejnymi etapami edukacyjnymi są szczególnie widoczne w nauczaniu matematyki.

Porównanie treści nauczania z matematyki w klasach 1–3 i w klasach 4–8 szkoły podstawowej, zawartych w podstawie programowej, pokazuje, jak nowe zagadnienia, realizowane w pierwszych latach w klasach starszych, są mocno osadzone w matematycznej edukacji wczesnoszkolnej.

Tabela 1. Porównanie treści nauczania z matematyki w szkole podstawowej²

Klasy 1–3	Klasy 4–8
Rozwiązuje równania z niewiadomą zapisaną w postaci okienka	Układa i rozwiązuje równania z jedną niewiadomą [uwaga: dowolne oznaczenie zmiennej]
Połowa, pół litra, dwie połówki, dwa i pół [pięć poówek]	$\frac{2}{2} = 1$, jedna druga, dwa i jedna druga, pięć drugich
Cztery równe części, czwarta część, ćwierć, ćwierć litra [połowa to 2 ćwierci]	$\frac{4}{4} = 1$ jedna czwarta, $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$

¹ Już w latach siedemdziesiątych ubiegłego stulecia prowadzone były badania dotyczące niepowodzeń w uczeniu się matematyki i podejmowanych działań naprawczych. O nauczaniu matematyki w przedszkolu i w edukacji wczesnoszkolnej, o niepowodzeniach i próbach zaradzenia im pisała prof. dr hab. Edyta Gruszczyk-Kolczyńska w licznych swoich publikacjach, m.in. w jednej z pierwszych publikacji *Niepowodzenia w uczeniu się matematyki u dzieci z klas początkowych. Diagnoza i terapia*, „Prace Naukowe Uniwersytetu Śląskiego”, nr 553, Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, Katowice 1985. Zagadnieniom związanym z nauczaniem matematyki w edukacji przedszkolnej i w młodszym wieku szkolnym wiele publikacji poświęciła również prof. dr hab. Danuta Klus-Stańska.

² Zestawienie porównawcze przygotowano m.in. na szkolenie nauczycieli przedmiotów matematyczno-przyrodniczych i uczących matematyki w edukacji wczesnoszkolnej; podobne, bardziej szczegółowe zestawienie dla klas IV–VIII szkoły podstawowej i szkoły ponadpodstawowej, opierając się na podstawie programowej dla szkoły podstawowej [2017 r.] i dla szkoły ponadpodstawowej [2018 r.]. Więcej: J. Paczkowski, *Podstawa programowa z matematyki w szkole średniej od 2019 r.*, „Informator Oświatowy” nr 4/2018, ODN w Słupsku.

Klasy 1–3	Klasy 4–8
15 stopni ciepła (+15°), 3 stopnie mrozu (–3°) – oznaczanie na skali termometru	Liczby całkowite na osi liczbowej
Kreślenie figur [obwódź ołówkiem tę figurę, zmierz odpowiednie długości, oblicz jej obwód]	Obliczanie obwodu figury
Rozpoznaje, wyodrębnia, rysuje figury, wykorzystuje sieć kwadratową [ile kwadracików zawiera ten prostokąt? jakie jest pole tego prostokąta? jaki jest obwód tego prostokąta?] [rozpoznaje trójkąty, kwadraty, prostokąty, koła]	Obliczanie obwodu lub pola prostokąta, kwadratu [praktyczne, w sieci kwadratowej lub przy przyjętej wielkości odcinka lub kwadracika jednostkowego] Rozpoznaje elementy koła/okręgu; oblicza pole i obwód
Mierzenie długości odcinków, boków figur geometrycznych itp.; podaje wynik pomiaru, posługując się jednostkami długości: centymetr, metr, milimetr; wyjaśnia związki między jednostkami długości; posługuje się wyrażeniami dwumianowanymi; wyjaśnia pojęcie kilometr	Przeliczanie jednostek długości, pola, objętości w postaci dwumianowanej na postać jednomianowaną

Legenda: kursywą zapisano uwagi i komentarze – J.P.

Z takiego zestawienia wynika, jak na każdym etapie edukacyjnym istotne jest mówienie tym samym lub zbliżonym językiem matematycznym, operowanie pojęciami, które we wczesnym nauczaniu najczęściej powinny mieć charakter praktyczny, a niekoniecznie muszą być nazwane *explicite* (w sposób dosłowny, precyzyjny). Na kolejnym progu edukacyjnym w klasie czwartej nauczyciele matematyki oczekują, że pracować będą z uczniem posiadającym pewien zasób wiedzy matematycznej, wykazującym się sprawnością rachunkową i umiejętnościami oraz odpowiednią motywacją do uczenia się matematyki.

Podobnie rzecz przedstawia się, gdy porównamy treści nauczania z matematyki w szkole podstawowej i w szkole ponadpodstawowej – choćby na przykładzie funkcji, która stanowi znaczącą część programu nauczania w szkole ponadpodstawowej i ponadgimnazjalnej, a której nie ma w podstawie programowej SP. Pojęcie funkcji w szkole podstawowej oraz związane z nią język i operacje występują w tzw. postaci ukrytej, np. w diagramach. Analiza i interpretacja zmian ilościowych na wykresach słupkowych zawsze odnosi się do tego, w jakich granicach to się dzieje, w jakim czasie (*w jakim przedziale*). Uczeń odczytuje, interpretuje i omawia diagramy, opisuje na ich podstawie zjawiska i określa przebieg zmiany wartości danych, na przykład z użyciem określeń *wartości rosną, wartości maleją, wartości są takie same (przyjmowana wartość jest stała)*. A to już wiąże się ze zmiennością funkcji w przedziałach³.

Matematyczne treści programowe w szkole podstawowej rozłożone są w sposób usystematyzowany w czasie w klasach 4–8, z różnym przydziałem ilościowym godzin. Układ tych treści przedstawia matryca (tab. 2), uwzględniono w niej zakres treści programowych i klasę, w której one są realizowane. Matryca została opracowana na podstawie propozycji wydawnictwa Nowa Era (*Matematyka z kluczem: Program nauczania matematyki dla klas 4–8 szkoły podstawowej*). Układ treści w klasach 4–8 szkoły podstawowej).

³ Więcej – patrz: J. Paczkowski, *Matematyka bez funkcji w nowej podstawówce*, „Informator Oświatowy” nr 3/2018, ODN w Słupsku.

Tabela 2. Realizacja treści nauczania z matematyki w klasach 4–8 szkoły podstawowej – z podziałem na klasy

Działy/trześci nauczania zawarte w podstawie programowej kształcenia ogólnego w 8-letniej SP	Klasa – SP				
	4	5	6	7	8
Cyfry rzymskie – 2 lata (IV, V) (6 g.)	x	x			
Skala, czytanie map – 2 lata (IV, VI)	x		x		
Procenty – 2 lata (VI, VII)			x	x	kk
Liczby naturalne – 2 lata (IV, V)	x	x	kk	kk	Kk
Potęgi i pierwiastki – 2 lata (potęgi IV; potęgi i pierwiastki VIII)	x			x	Kk
Ułamki zwykłe – 2 lata (IV, V)	x	x	kk	kk	Kk
Ułamki dziesiętne – 2 lata (IV, V)	x	x	kk	kk	Kk
Ułamki na osi liczbowej – 2 lata (IV, V) (*)	x	x	kk	kk	Kk
Liczby całkowite, wymierne na osi liczbowej – 1 rok (V) (*)		x	kk	kk	Kk
Liczby całkowite, wymierne – 1 rok (VI)			x	kk	kk
Wyrażenia algebraiczne i równania – 3 lata (VI, VII, VIII)			x	x	x
Oś liczbowej (ułamki na osi) – 2 lata (IV, V) (*)	x	x			
Os liczbową (liczby całkowite, wymierne na osi) – 1 rok (V) (*)		x			
Układ współrzędnych; punkty, odcinki, wielokąty – 1 rok (VII)				x	?
Odbicia, symetrie, przystawanie figur – 2 lata (IV, VIII)	x				x
Koła i okręgi – 2 lata (IV, VIII)	x				x
Kąty, rodzaje, porównywanie, kąty w wielokątach – 4 lata (IV, V, VII, VIII)	x	x		x	x
Rozpoznawanie wielokątów – 2 lata (IV, V)	x	x	kk		kk
Obwody figur – 1 rok (IV)	x	kk	kk	kk	kk
Pola wielokątów – 3 lata (IV, V, VI)	x	x	x	kk	kk
Twierdzenie Pitagorasa – 1 rok (VII)				x	kk
Rozpoznawanie brył – 1 rok (IV)	x	kk	kk		kk
Pola powierzchni brył – 3 lata (V, VI, VIII)		x	x		x
Objętość brył – 3 lata (V, VI, VIII)		x	x		x
Zbieranie danych, diagramy, rach. prawdopodobieństwa – 2 lata (VI, VIII)			x		x
Średnia arytmetyczna – 2 lata (V, VIII)		x			x

Legenda: (*) – te treści programowe dotyczą działań na liczbach, a jednocześnie kształcą one praktyczną orientację na osi liczbowej, dlatego ponownie zapisano je w dziale dotyczącym osi liczbowych i kratowego układu współrzędnych; x – realizacja działu/trześci programowych w danej klasie; kk – wykorzystanie i kontynuacja treści programowych w klasach wyższych.

Źródło: *Matematyka z kluczem*, Wydawnictwo „Nowa Era” [oprac. własne].

Matryca pokazuje, jak treści nauczania są rozwijane i poszerzane w kolejnych klasach cyklu edukacyjnego, a także jak one funkcjonują i są stosowane w latach następnych w innych działach matematyki. W matrycy nie uwzględniono liczby godzin przeznaczonych na ich realizację. Tak więc określenia „2 lata, 3 lata” jedynie oznaczają, że treści nauczania są realizowane w 2 lub 3 klasach, jednakże nie przez cały rok szkolny. Każdy z tych zakresów treści, jego rozkład, należy

rozpatrywać również z uwzględnieniem liczby godzin przeznaczonych na jego realizację, jak też z punktu widzenia kształconych na lekcjach matematyki obszarów umiejętności kluczowych (celów kształcenia, wymagań ogólnych).

Trójwymiarowość przestrzeni edukacyjnej

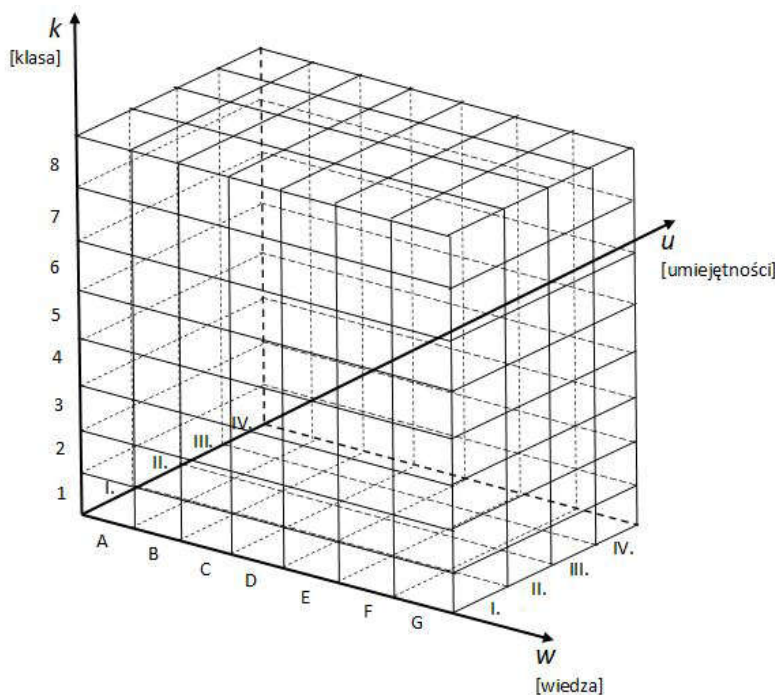
Matematyczną Przestrzeń Edukacyjną wyznaczają trzy komponenty procesu edukacyjnego:

- cele kształcenia, czyli wymagania ogólne,
- treści nauczania (wiadomości i umiejętności), czyli wymagania szczegółowe,
- czas realizacji (rozumiany w cyklu klasowym i w rozkładzie godzinowym).

Z racji tego przestrzennego rozumienia zagadnienia można przedstawić graficznie w układzie współrzędnych o trzech wymiarach:

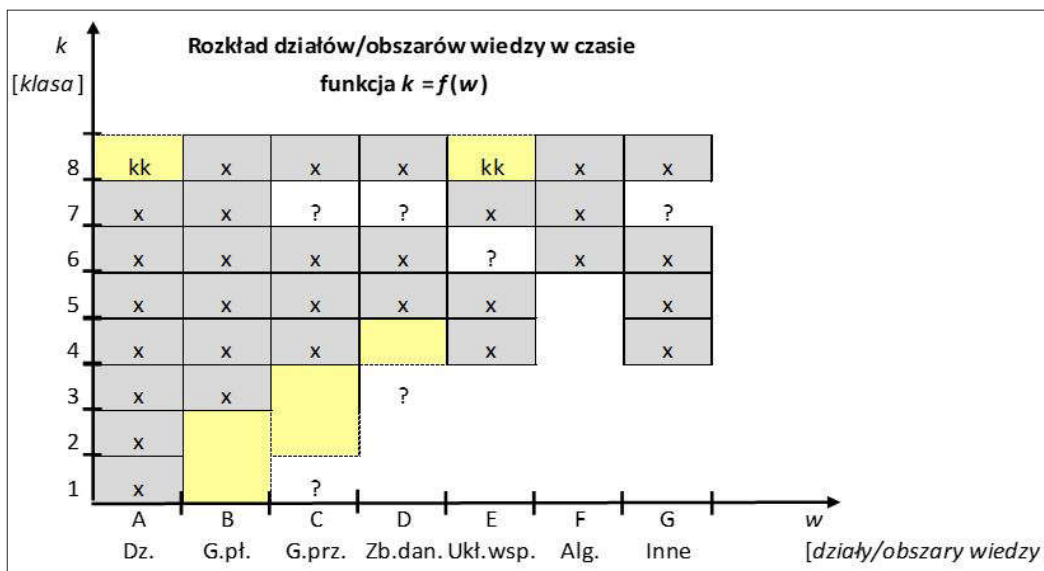
- wiedza matematyczna – czyli wiadomości i czynności/umiejętności, z podziałem na działy lub obszary (oś w),
- kluczowe umiejętności matematyczne – rozumiane jako wymagania ogólne, zawarte w podstawie programowej z matematyki (oś u),
- klasa – czyli czas realizacji w cyklu klasowym (oś k).

Można tę 3-wymiarową matematyczną przestrzeń edukacyjną przedstawić w formie kubicznej, jak na rysunku 1. Wtedy w wymiarze przestrzennym mówimy o funkcji g , której wartością są relacje między wiedzą a kluczowymi umiejętnościami matematycznymi: $k = g(w, u)$.



Rysunek 1. Matematyczna Przestrzeń Edukacyjna w ujęciu 3-wymiarowym

Nie jest to jednak struktura kubiczna pełna. Są w niej dziury i luki. Bardziej przypomina ona organy (instrument muzyczny), w których piszczałki stykają się ze sobą z przemieszczeniem w różnych układach. Wystarczy spojrzeć na przednią ścianę tej struktury, czyli na płaszczyznę wyznaczoną osiami w (wiedza) i k (klasa), jak na rysunku 2, który przedstawia rozkład treści programowych wg poszczególnych klas.



Rysunek 2. Matematyczna przestrzeń edukacyjna w ujęciu 2-wymiarowym – realizacja treści nauczania wg poziomu klasowego

Legenda: A – działania na liczbach; G.pł. – geometria na płaszczyźnie; G.prz. – geometria przestrzenna; Zb.dan. – zbieranie, interpretacja danych, statystyka i rachunek prawdopodobieństwa; Alg. – wyrażenia algebraiczne, równania; Inne – cyfry rzymskie, skala, czytanie map, odbicia, symetrie, przystawanie figur.

Jako że mówimy o trójwymiarowej przestrzeni, to rysunek ten ma głębię (tu niewidoczną). Więc gdy wchodzimy w głąb tej konstrukcji równoległe do osi umiejętności u (wg poszczególnych obszarów umiejętności kluczowych, czyli wymagań ogólnych), widoczny wyżej graficzny układ zmienia się w zależności od oczekiwanych kompetencji ucznia, ale także zmienia się wskutek przemieszczania się między działami i klasami cząstkowych treści programowych (powtarzanie, utrwalanie, poszerzanie, wykorzystanie w innych relacjach). Można to przyrównać do efektów, jakie uzyskujemy w badaniach tomografem komputerowym, w którym otrzymywany plasterkowy obraz się zmienia.

Tak więc każdy z tych obszarów wiedzy matematycznej można na każdym poziomie wymagań ogólnych analizować pod kątem stopnia złożoności czynności – od tych prostych poprzez naśladowanie i algorytmiczne odwzorowania aż do bardziej złożonych, wymagających zastosowania wielu operacji myślowych. Próba zestawienia tych wymagań z taksonomią ABC Bolesława Niemierki może dać ciekawe wyniki porównawcze.

Tabela 3. Zestawienie wymagań ogólnych (celów kształcenia) z matematyki z taksonomią celów poznawczych ABC⁴

Wymagania ogólne	Taksonomia celów ABC
<p>I. Sprawności rachunkowa.</p> <p>1. Wykonywanie nieskomplikowanych obliczeń w pamięci lub w działaniach trudniejszych pisemnie oraz wykorzystanie tych umiejętności w sytuacjach praktycznych.</p> <p>2. Weryfikowanie i interpretowanie otrzymanych wyników oraz ocena sensowności rozwiązania.</p>	<p>(A) Zapamiętanie wiadomości – przypomnienie sobie pewnych terminów, faktów, praw i teorii naukowych, zasad działania; bez mylenia ich i zniekształcania</p> <p>[rozpoznać, wymienić elementy, podać, określić, zdefiniować, zidentyfikować, wyliczyć]</p>
<p>II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.</p> <p>1. Odczytywanie i interpretowanie danych przedstawionych w różnej formie oraz ich przetwarzanie.</p> <p>2. Interpretowanie i tworzenie tekstów o charakterze matematycznym oraz graficzne przedstawianie danych.</p> <p>3. Używanie języka matematycznego do opisu rozumowania i uzyskanych wyników.</p>	<p>(B) Zrozumienie wiadomości – umiejętność przedstawienia wiadomości w innej formie, uporządkowania, streszczenia i omówienia</p> <p>[wyjaśnić, scharakteryzować, streścić, rozróżnić, uzasadnić, zilustrować]</p>
<p>III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.</p> <p>1. Używanie prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych, interpretowanie pojęć matematycznych i operowanie obiektami matematycznymi.</p> <p>2. Dobieranie modelu matematycznego do prostej sytuacji oraz budowanie go w różnych kontekstach, także w kontekście praktycznym.</p>	<p>(C) Stosowanie wiadomości w sytuacjach typowych – praktyczne posługiwanie się wiadomościami wg podanych uprzednio wzorów</p> <p>[wykonać, rozwiązać, zastosować, skonstruować, porównać, określić, narysować, sklasyfikować, zmierzyć, połączyć, zaprojektować, wybrać sposób, wykreślić]</p>
<p>IV. Rozumowanie i argumentacja.</p> <p>1. Przeprowadzanie prostego rozumowania, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, rozróżnianie dowodu od przykładu.</p> <p>2. Dostrzeganie regularności, podobieństw oraz analogii i formułowanie wniosków na ich podstawie.</p> <p>3. Stosowanie strategii wynikającej z treści zadania, tworzenie strategii rozwiązania problemu, również w rozwiązaniach wieloetapowych oraz w takich, które wymagają umiejętności łączenia wiedzy z różnych działów matematyki.</p>	<p>(D) Stosowanie wiadomości w sytuacjach problemowych – umiejętność formułowania i rozwiązywania problemów, dokonywania analizy i syntezy nowych dla niego zjawisk, formułowania planu działania, tworzenia oryginalnych przedmiotów, wartościowania według pewnych kryteriów</p> <p>[udowodnić, przewidzieć, wykryć, zanalizować, ocenić, zaplanować, zaproponować, opracować]</p>

Zestawienie takie nie zawsze da się w sposób jednoznaczny odnieść do części treści nauczania, jednakże pozwala na analizę struktury wymagań ogólnych podstawy programowej (półoś *u*) w odniesieniu do poszczególnych obszarów wiadomości i umiejętności (półoś *w*).

⁴ Patrz: B. Niemierko, *Pomiar wyników kształcenia*, WSiP, Warszawa 1999; także: B. Niemierko, *Kształcenie szkolne. Podręcznik skutecznej dydaktyki*, WAiP, Warszawa 2007.

Taką analizę poszczególnych treści nauczania, wyspecyfikowanych w postaci wiadomości i umiejętności, można przeprowadzić w odniesieniu do coraz bardziej złożonych wymagań ogólnych (matematycznych umiejętności kluczowych), z dodatkowym wsparciem w postaci interpretacji tych treści wg taksonomii celów. W wielu przypadkach jest to metoda spójna z określeniem poziomu osiągnięć ucznia. Próby takich analiz można odnaleźć w wielu publikacjach w ostatnich dziesięcioleciach XX wieku. Taka też idea przyświecała m.in. Krystynie Wojciechowskiej, gdy w swoich badaniach z tamtego okresu podejmowała próbę zastosowania taksonomii celów poznawczych ABC do interpretacji programu nauczania w edukacji wczesnoszkolnej⁵. W odniesieniu do rodzaju kwalifikacji oraz związanych z nimi aktywności i umiejętności, zapisanych w programie matematycznej edukacji wczesnoszkolnej, zaproponowane zostały podkategorie celów (A1, A2 ... B1, B2 ... C1, C2 ... D1, D2 ...). W ujęciu taksonomicznym każda kategoria rozwijała się w hierarchicznym układzie podkategorii – od prostej do bardziej złożonej.

Takie podkategorie można dostrzec w planach wynikowych, dołączanych wraz z rozkładem materiału do programów nauczania, w których często cząstkowe wiadomości i umiejętności przypisuje się do poziomów osiągnięć ucznia (poziom podstawowy – wiadomości i umiejętności konieczne i podstawowe; poziom ponadpodstawowy – wiadomości i umiejętności rozszerzające i dopełniające).

W tabelach 4a i 4b podano dwa przykłady ujęcia wybranych obszarów wiadomości i umiejętności w kategoriach taksonomicznych (podstawa programowa dla szkoły podstawowej – 2017). Nie uwzględniono w nich ewentualnego podziału na podkategorie, gdyż może on mieć charakter subiektywny, intuicyjny.

Tabela 4a. Przykładowe przyporządkowanie treści nauczania z matematyki wg kategorii taksonomicznych

Taksonomia ABC [B. Niemierko]	OBSZAR WIADOMOŚCI I UMIEJĘTNOŚCI: <i>Liczby, działania na liczbach</i>
(A) Zapamiętanie wiadomości	Rozpoznawanie, odczytywanie, zapisywanie liczb
(B) Zrozumienie wiadomości	Interpretacja liczb, przedstawianie na osi liczbowej, porównywanie liczb, szacowanie liczb, porównywanie różnicowe i ilorazowe; wielokrotności liczb; prawa liczb (przemienności, rozdzielności)
(C) Stosowanie wiadomości w sytuacjach typowych	Obliczenia pamięciowe i pisemne na liczbach; wykorzystanie praw liczb do ułatwienia obliczeń pamięciowych; własności liczb, cechy podzielności liczb, NWW i NWD; kolejność działań
(D) Stosowanie wiadomości w sytuacjach problemowych [Analiza, Synteza, Krytyczna ocena]	Rozwiązywanie zadań tekstowych z wykorzystaniem działań na liczbach

⁵ K. Wojciechowska, *Zastosowanie taksonomii celów nauczania początkowego matematyki do interpretacji programu nauczania* [w:] B. Niemierko (red.), *Diagnostyka edukacyjna*, Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego, Gdańsk 1994, s. 119 i n., s. 130.

Tabela 4b. Przykładowe przyporządkowanie treści nauczania z matematyki wg kategorii taksonomicznych

Taksonomia ABC [B. Niemierko]	OBSZAR WIADOMOŚCI I UMIEJĘTNOŚCI: <i>Figury na płaszczyźnie</i>
(A) Zapamiętanie wiadomości	Rozpoznawanie, kreślenie figur
(B) Zrozumienie wiadomości	Własności figur, klasyfikowanie wg cech i własności; elementy figur (wysokości, przekątne, kąty); przystawanie figur; obwody figur
(C) Stosowanie wiadomości w sytuacjach typowych	Pojęcie pola figury, obliczanie pól figur; twierdzenie Pitagorasa i zastosowanie
(D) Stosowanie wiadomości w sytuacjach problemowych [Analiza, Synteza, Krytyczna ocena]	Wykorzystanie w rozwiązywaniu zadań, w dowodzeniu własności figur; obwody i pola figur w kratowym układzie współrzędnych

Trójwymiarowa Matematyczna Przestrzeń Edukacyjna nie jest strukturą osamotnioną, istnieje obok podobnych struktur innych przedmiotów szkolnych, wchodzi w relacje z nimi. W praktyce zarówno konstruktor, jak i jego podobny, jakby zanurzone są w czasoprzestrzennym wymiarze oczekiwań – nauczycieli, uczniów, opiekunów, egzaminatorów – w uwikłaniu z czynnikami zewnętrznymi, niezależnymi od tej przestrzeni. Tak więc możemy mówić o czasoprzestrzennym wymiarze edukacji matematycznej, na którą oddziałują tzw. czynniki/uwarunkowania psychiczne/psychologiczne, społeczne i ekonomiczne (α_{PSE})⁶, czy też szeroko rozumiane czynniki emocjonalne i motywacyjne (β_M), zarówno uczniów, jak i nauczycieli, a także trwałość wiedzy (Δ_{TR})⁷. Ten ostatni wskaźnik, trwałości wiedzy, wiąże się z procesem zapamiętywania i zapominania. Na trwałość wiedzy ma istotny wpływ powtarzanie – w spiralnej strukturze edukacji matematycznej (stosowanie i analiza problemu, ale z wyższego punktu widzenia), jak też przy powtarzaniu przed sprawdzaniem. Innym aspektem trwałości wiedzy są relacje matematyki z innymi naukami ścisłymi w przedmiotowym systemie edukacyjnym, jej funkcjonalna rola jako narzędzia matematycznego w naukach przyrodniczych, co też może mieć wpływ na skuteczność i trwałość wiedzy matematycznej (φ_N).

Jak to się ma w edukacji matematyczno-przyrodniczej w szkole podstawowej, ilustruje tabela 5.

⁶ W początkowym okresie wdrażania egzaminów zewnętrznych CKE prowadziła i publikowała wyniki badań, związanych z kontekstem egzaminów zewnętrznych – *Ekonomiczne oraz geopolityczne uwarunkowania różnicowania egzaminów zewnętrznych, Społeczne uwarunkowania różnicowania wyników egzaminów, Psychologiczne i biologiczne uwarunkowania różnicowania wyników egzaminów*, „Biuletyn Badawczy” nr 11, 12, 13, CKE, Warszawa 2007. Podobne badania w zakresie uwarunkowań wyników egzaminów zewnętrznych prowadził Roman Dolata oraz zespół jego doktorantów, skupionych m.in. przy projekcie EWD.

⁷ Zagadnieniem trwałości wiedzy w procesie zapamiętywania i zapominania zajmował się m.in. pod koniec XIX w. Hermann von Ebbinghaus. Na podstawie badań przedstawił krzywą zapominania, zwaną krzywą Ebbinghaus, która ilustrowała spadek zapamiętanych informacji z upływem czasu.

Tabela 5. Elementy matematyki na lekcjach przedmiotów przyrodniczych w SP⁸

Sprawność rachunkowa	Działania na liczbach naturalnych i ułamkowych; zaokrąglanie liczb; wykorzystanie działań na ułamkach w obliczeniach na jednostkach mianowanych
Wielkości duże i małe	Zapis liczb w notacji wykładniczej $a \cdot 10^k$, gdy $1 \leq a < 10$, k jest liczbą całkowitą; odczytywanie, interpretowanie i porównywanie dużych i małych wielkości
Tabele, diagramy, wykresy	Odczytywanie i interpretowanie, tworzenie diagramów, wykresów (w tym w prostokątnym kratowym układzie współrzędnych)
Jednostki miary	Wykorzystanie do obliczeń długości, powierzchni, objętości, pojemności (np. cylindra – wyprzedzanie programu SP)
	Wykorzystanie do obliczeń masy (ciężaru) i gęstości, obliczeń pieniężnych
Miary czasu, częstotliwość	Wykorzystanie do obliczeń
Wielkości proporcjonalne	Skala, powiększanie i pomniejszanie; skala mapy, obliczenia
Wzory, równanie	Przekształcanie wzorów literowych; wykorzystanie pojęcia „równość stronami” w uzupełnianiu równań chemicznych

Tak się też zdarza – przy analizie wymagań szczegółowych (treści nauczania) w podstawie programowej – że na lekcjach biologii, chemii, fizyki lub geografii wyprzedzamy treści nauczania z matematyki lub nawet wykraczamy poza obowiązujące w podstawie programowej. Choćby w realizacji zagadnień, związanych z wyżej wspomnianą funkcją – np. wykresy liniowe w układzie współrzędnych.

Tabela 6. „Ukryte funkcje” na lekcjach przedmiotów przyrodniczych – przykłady⁹

Fizyka	<ul style="list-style-type: none"> • Ruch jednostajny prostoliniowy (droga, prędkość, czas) – wykres i jego interpretacja • Ruch jednostajnie przyspieszony vs. opóźniony (droga, prędkość, przyspieszenie vs. opóźnienie, czas) – wykres i jego interpretacja • Ruch jednostajnie zmienny – wykres i jego interpretacja, zmiany w przedziałach czasowych
Chemia	<ul style="list-style-type: none"> • Rozpuszczalność substancji (krzywa rozpuszczalności) • Przeliczanie stężeń, masy substancji (odwołania do wielkości proporcjonalnych)
Geografia	<ul style="list-style-type: none"> • Skala mapy – przeliczanie (intuicyjne wykorzystanie zależności proporcjonalnych) • Diagramy słupkowe, wykresy (struktura społeczeństwa wg wieku i płci, procent bezrobocia, ludność miast, ludność krajów)

Efektom tych zalegających się elementów matematycznej przestrzeni edukacyjnej i relacji między nimi, a także wzajemnej interakcji podobnych przedmiotowych konstruktów są wyniki egzaminu końcowego (E_K). Tę zależność funkcyjną możemy zapisać jako

⁸ O kształceniu kompetencji matematyczno-przyrodniczych i wykorzystaniu umiejętności matematycznych na zajęciach lekcyjnych przedmiotów ścisłych – patrz: J. Paczkowski, *Rozwijanie kompetencji matematycznych uczniów*, „Informator Oświatowy” nr 1/2020, ODN w Słupsku; A. Kreft, *Matematyka w biologii*, „Informator Oświatowy” nr 1/2020, ODN w Słupsku.

⁹ Zestawienie przygotowano m.in. na szkolenie nauczycieli przedmiotów matematyczno-przyrodniczych i uczących matematyki w edukacji wczesnoszkolnej; ponadto zagadnienia związane z matematyką w przedmiotach przyrodniczych, patrz także: J. Paczkowski, *Matematyka bez funkcji...*; F. Garszczyński, *Ile matematyki jest w fizyce?*, „Informator Oświatowy” nr 4/2018, ODN w Słupsku.

$$E_K = h(w, u, t) + \alpha_{PSE} + \beta_M + \Delta_{TR} + \varphi_N$$

gdzie: $h(w, u, t)$ – oznacza wartość relacji zachodzących w kubicznej strukturze MPE, α_{PSE} – uwarunkowania psychologiczne, społeczne i ekonomiczne, β_M – czynniki emocjonalne i motywacyjne, (Δ_{TR}) – trwałość wiedzy, φ_N – zastosowanie matematyki w przedmiotach przyrodniczych.

Zapis nie jest formułą matematyczną, wskazuje jedynie na wpływ czynników dodatkowych (dodatni bądź ujemny), których realne oddziaływanie w 3-wymiarowej matematycznej przestrzeni edukacyjnej jest jakże istotne. I to niezależnie od czynności nauczycieli i uczniów na lekcjach matematyki w systemie klasowo-lekcyjnym.

Przed pierwszym egzaminem ósmoklasisty – materiały pomocnicze i programy nauczania z matematyki

Wraz z ogłoszeniem rozporządzenia w sprawie szczegółowych warunków i sposobu przeprowadzania egzaminu ósmoklasisty Centralna Komisja Egzaminacyjna w 2017 roku na swoich stronach udostępniła informatory o egzaminie ósmoklasisty (ogólny i dla trzech przedmiotów: języka polskiego, matematyki, języka obcego) wraz z przykładowymi arkuszami egzaminacyjnymi. W grudniu 2018 r. przeprowadzony został egzamin próbny. W marcu 2019 r. OKE w Krakowie i OKE w Łomży udostępniły na swoich stronach materiał ćwiczeniowy w postaci zestawu zadań z matematyki¹⁰.

W ten sposób, wraz z arkuszem egzaminacyjnym z kwietnia 2019 roku, na podstawie materiałów dostępnych na stronach CKE i OKE powstała baza ponad 100 zadań, które zawierają modele rozwiązań i schematy oceniania oraz obejmują wszystkie obszary wiadomości i umiejętności, wymienione w podstawie programowej. Dzisiaj baza ta jest powiększona o kolejne 40–50 zadań.

Tabela 7. Rozkład ilościowy zadań (wg typów) w materiałach CKE i OKE (stan na 30.06.2019)¹¹

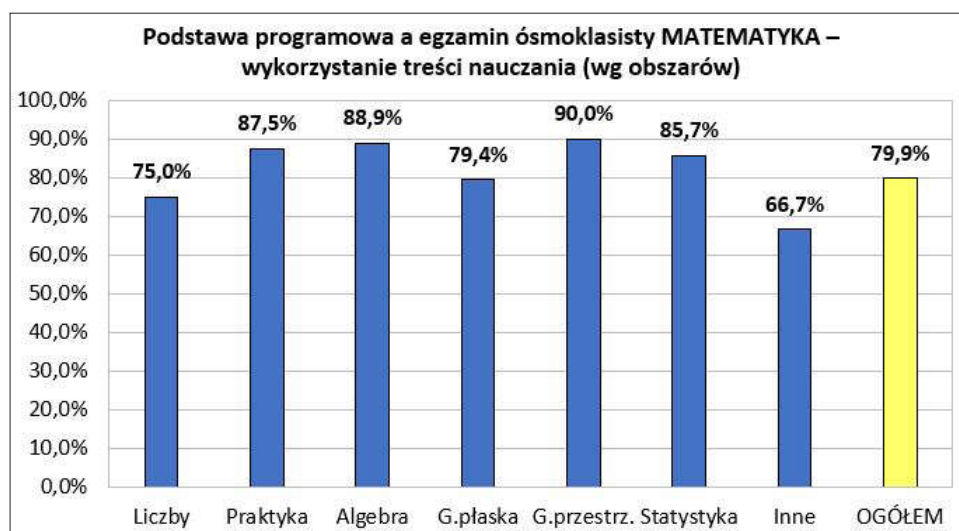
	Liczba zadań – wg typów zadań							Razem zadań
	WW	L	PF	Arg	KO(2)	RO(3)	RO(4)	
Informator	7	3	5	1	3	2	1	22
Próbny XII 2018	6	3	5	1	3	3		21
Ćwiczenia 2019 (Kraków)	14	7	9	3	9	2	4	48
Egzamin IV 2019	11	1	3		3	3		21

¹⁰ Informator o egzaminie ósmoklasisty od roku szkolnego 2018/2019. Zasady przeprowadzenia i przystępowania do egzaminu, CKE, Warszawa 2017; Informator o egzaminie ósmoklasisty z matematyki od roku szkolnego 2018/2019, CKE, Warszawa 2017; Przykładowy arkusz Egzamin ósmoklasisty od roku szkolnego 2018/2019. Matematyka, CKE, Warszawa 2017; Arkusz próbny Egzamin ósmoklasisty. Matematyka, 19.12.2018 r., CKE, Warszawa; Egzamin ósmoklasisty. Matematyka. Zestaw zadań. Materiał ćwiczeniowy dla uczniów i nauczycieli, OKE w Krakowie, marzec 2019.

¹¹ J. Paczkowski, Czy uczniowie klas ósmych mogli lepiej napisać egzamin z matematyki?, „Informator Oświatowy” nr 4/2019, ODN w Słupsku.

We wszystkich tych materiałach każde zadanie z arkusza lub propozycji ćwiczeniowych opatrzone jest etykietą informującą, jakich matematycznych umiejętności kluczowych (wymagań ogólnych) i jakich treści nauczania dotyczą te zadania. Mając tak bogaty materiał przygotowujący do egzaminu zewnętrznego ósmoklasisty, można było przeprowadzić analizę porównawczą między zawartością zagadnień w podstawie programowej a sprawdzanymi treściami nauczania, wyspecyfikowanymi w tych materiałach, czyli jaki procent treści z podstawy programowej został wykorzystany w materiałach CKE/OKE. Roboczo nazwiemy to „przykryciem podstawy programowej”.

Procentowe wykorzystanie treści nauczania podstawy programowej w tych materiałach przedstawia rysunek 3. W zestawieniu tym prócz informacji z ww. materiałów uwzględniono również kartotekę arkusza egzaminacyjnego z kwietnia 2019 r. Analizę przeprowadzono z punktu widzenia poszczególnych zagadnień treści nauczania, wykorzystanych w zadaniach. Nie analizowano pod kątem częstotliwości ich występowania w tych zadaniach.



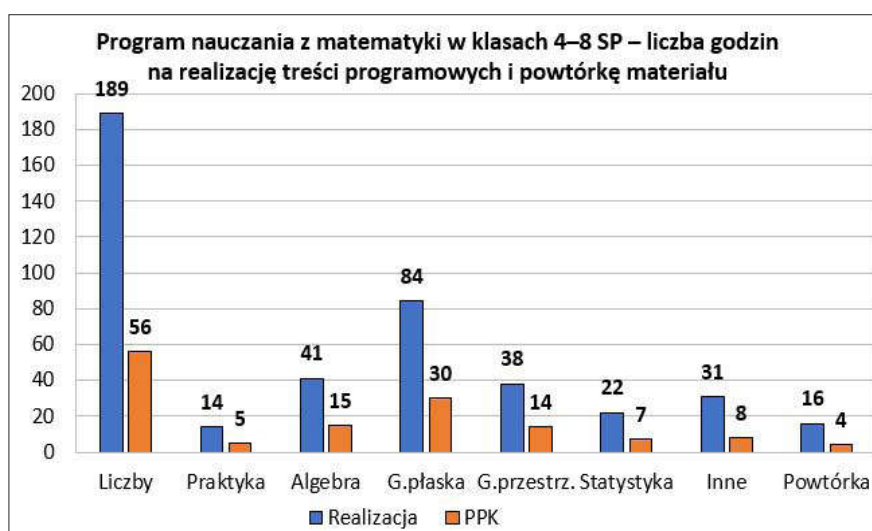
Rysunek 3. Treści nauczania w podstawie programowej SP (2017 r.) z matematyki a egzamin ósmoklasisty – wg obszarów wiadomości i umiejętności

Źródło: oprac. własne.

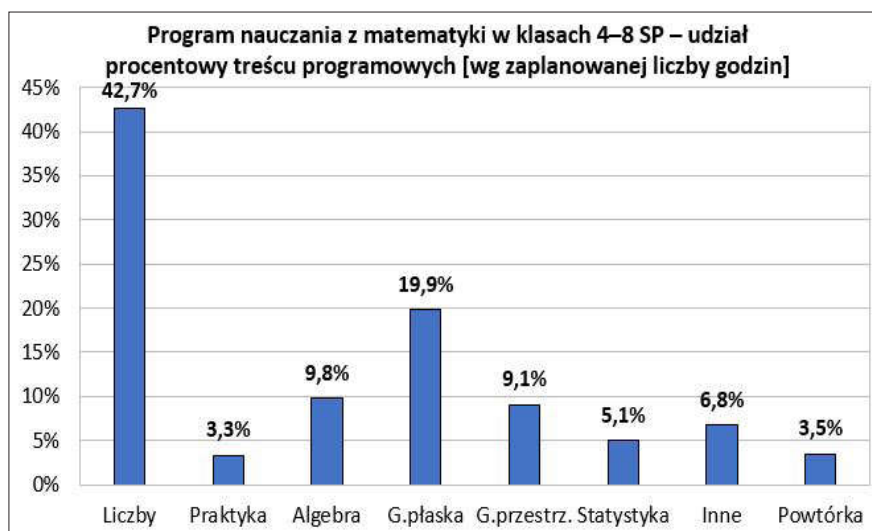
Tak więc procent wykorzystania treści nauczania jest wysoki – łącznie prawie 80%. W rozkładzie na poszczególne działy programowe, czyli obszary wiadomości i umiejętności, ten wskaźnik jest również wysoki – prawie 80% i więcej. Jedynie dwa obszary mają niższy wskaźnik procentowy – *Działania na liczbach* oraz *Inne*. W pierwszym przypadku wskaźnik ten będzie znacznie wyższy, jeśli uwzględnimy, że w pozostałych obszarach wykorzystywane są umiejętności związane z działaniami na liczbach, z obliczeniami. Natomiast obszar *Inne* dotyczy wąskiej grupy treści nauczania – są to: cyfry rzymskie, skala i czytanie map, przystawanie trójkątów.

Materiał przygotowawczy do egzaminu ósmoklasisty jest więc wystarczająco bogaty zarówno pod względem liczby zadań, jak i wykorzystania treści nauczania.

Inaczej natomiast w cyklu kształcenia w klasach 4–8 szkoły podstawowej przedstawia się analiza ilościowa godzin według obszarów wiadomości i umiejętności, jaką proponują autorzy przykładowego programu nauczania matematyki na realizację poszczególnych zagadnień treści nauczania. Ilustrują to dwa rysunki (rys. 4 i 5) – jeden przedstawia liczbę godzin przeznaczoną na realizację zadań i powtórzenie przed klasówką (ppk), drugi łączny procentowy udział tych godzin (realizacja + ppk).



Rysunek 4. Program nauczania matematyki w SP – rozkład godzinowy (wg obszarów)
 Źródło: *Matematyka z kluczem*, Nowa Era [oprac. własne].



Rysunek 5. Program nauczania matematyki w SP – udział procentowy (wg obszarów)
 Źródło: *Matematyka z kluczem*, Nowa Era [oprac. własne].

„Ranking” obszarów jest nadto wyraźny: I. Liczby, II. Geometria na płaszczyźnie, III. Algebra, IV. Geometria przestrzenna itd. Oczywiście domyślamy się funkcji pomocniczej działań na liczbach w odniesieniu do innych obszarów

czy geometrii na płaszczyźnie w odniesieniu do geometrii przestrzennej, jak też innych, które wzmacniają efekt trwałości i przyczyniają się do międzyob-szarowej ciągłości edukacyjnej. Czyli „ukryty” przydział godzin jest wyższy.

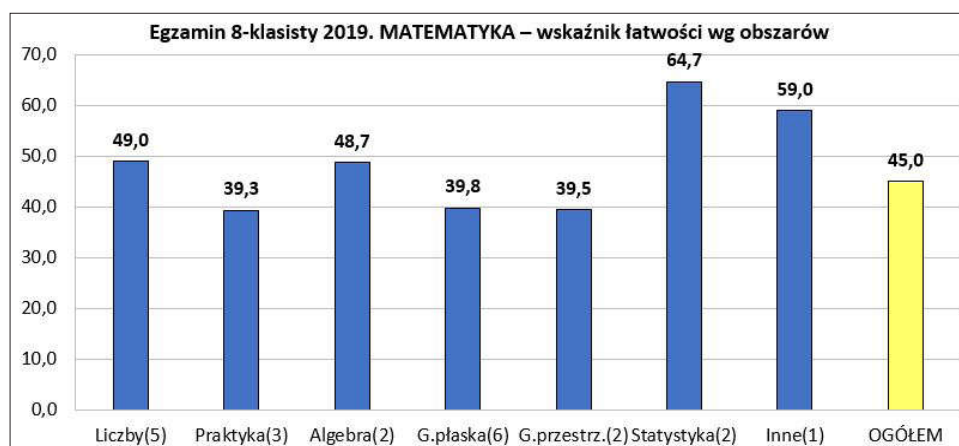
Po egzaminie ósmoklasisty 2019 z matematyki

Wspomniana baza zadań z dołączonymi etykietami informacyjnymi, zawartych w materiałach na stronach internetowych CKE i OKE, zwiększyła się o kolejne 40–50 zadań w stosunku do stanu na koniec czerwca 2019 roku, nie licząc za-dań, które można znaleźć w zakładkach na tychże stronach. Tak więc skala wy-korzystania treści nauczania z podstawy programowej będzie jeszcze większa.

Czego nie można powiedzieć o samym arkuszu egzaminacyjnym? Egzamin zewnętrzny powszechny i jednolity bada stan wiedzy „tu i teraz”. Zestawienie badanych wiadomości i umiejętności możemy przeanalizować jedynie jako „fotografię dnia” – przy dużej populacji badanych wyniki ogólne i częściowe egzaminu będą rzetelne.

Nauczyciele matematyki są zainteresowani wynikami egzaminów ósmokla-sisty, bardziej rzetelnymi w skali krajowej i okręgowej. W raportach prócz analizy poziomu wykonania poszczególnych zadań podawane są także wyniki uczniów w zakresie poszczególnych obszarów umiejętności (wymagań ogól-nych). Można więc pokusić się o kolejną analizę częściową, uwzględniającą obszary wiadomości i umiejętności. Niestety, podczas jednego egzaminu z matematyki obszary te sprawdzane są kilkoma zadaniami – sprawdzane tymi zadaniami treści nauczania nie są wystarczająco znaczącą informacją o wyko-rzystania treści z podstawy programowej. Analiza ta mogłaby być pełniejsza na podstawie wyników egzaminów z kilku lat.

Na rysunku 6 przedstawiono taką analizę na podstawie wyników egzaminu ósmoklasisty z matematyki w 2019 r. Nie można było przedstawić łącznej ana-lizy z dwóch egzaminów, bowiem do tej pory nie ukazało się sprawozdanie CKE z wyników egzaminu w 2020 r.



Rysunek 6. Wyniki egzaminu ósmoklasisty 2019 z matematyki (wg obszarów)

Analizę przedstawioną na rysunku 6 należy traktować z wielką ostrożnością, bowiem:

- dla każdego obszaru wiadomości i umiejętności mamy niewielką liczbę badanych treści nauczania podstawy programowej (1–5),
- nie uwzględnia ona wspomnianych wyżej funkcji pomocniczych działań na liczbach w odniesieniu do pozostałych obszarów czy funkcji pomocniczej elementów geometrii na płaszczyźnie w odniesieniu do geometrii przestrzennej itp.

Po wnikliwej analizie modelowych rozwiązań zadań z arkusza egzaminacyjnego w zależności od zaproponowanych elementów (i czynności) rozwiązań można zadania umieścić w kilku obszarach wiadomości i umiejętności. Tym samym wraz ze wzrostem liczby zadań wzrośnie „wiarygodność” takiej analizy. Jednakże w podobnej wieloletniej analizie pamiętać należy o nieporównywalności wyników egzaminu – ze względu na każdorazowo inną strukturę arkusza egzaminacyjnego, fragmentaryczność badania z punktu widzenia wykorzystania treści nauczania z podstawy programowej („fotografia dnia: tu i teraz”), odmienną każdego roku populację uczniów, kontekst sytuacyjny przeprowadzanego egzaminu. Nie wspomnę już o czynniku trwałości wiedzy, co wiąże się z procesem przygotowania się ucznia do egzaminu na określony termin.

Podsumowanie

- Edukacja matematyczna ma charakter ciągły. Istotne jest operowanie pojęciami i mówienie zbliżonym językiem na etapie edukacji wczesnoszkolnej, w klasach 4–8 szkoły podstawowej i w szkole ponadpodstawowej.
- Realizacja treści nauczania podstawy programowej z matematyki w szkole podstawowej jest rozłożona w czasie, zgodnie z propozycjami autorskich programów nauczania. W klasach wyższych, na kolejnych etapach kształcenia jest kontynuowana lub poszerzana. Wzmacniana w ten sposób jest trwałość nabytych wiadomości i umiejętności.
- Edukacja matematyczna w szkole pozostaje w relacjach ze szkolną edukacją w naukach przyrodniczych. Funkcjonalna rola matematyki jako narzędzia obliczeniowego na przedmiotach przyrodniczych może mieć istotny wpływ na skuteczność i trwałość wiedzy matematycznej.
- Matematyczna Przestrzeń Edukacyjna ma 3-wymiarowy charakter (wyznaczają ją: wiedza, matematyczne umiejętności kluczowe, czyli wymagania ogólne, oraz klasa). Jest tworem kubicznym. Nie jest to jednak struktura kubiczna pełna. Są w niej dziury, luki i przemieszczenia.
- Konstrukty w postaci Matematycznej Przestrzeni Edukacyjnej posiada także czwarty wymiar, czasowy – efekt w postaci wyników egzaminu zewnętrznego. Wyniki egzaminu są funkcją wiedzy, umiejętności kluczowych, czasu realizacji, ale również zależne są od dodatkowych czynników zewnętrznych (uwarunkowania psychologiczne, społeczne i ekonomiczne, czynniki emocjonalnej i motywacyjne, trwałość wiedzy).
- Na stronach CKE i OKE zamieszczono bogaty zestaw materiałów. Zaproponowane w tych materiałach zadania mają etykietę informującą, jakie treści nauczania i jakie wymagania ogólne są nimi sprawdzane. Procentowe wykorzystanie w tych materiałach treści nauczania z podstawy programowej jest wysokie.

- Analiza programów nauczania pokazuje liczbę godzin przeznaczoną na realizację treści nauczania. Najwięcej godzin przypada na działania na liczbach, obliczenia (około 43%) i na elementy geometrii płaskiej i przestrzennej (około 29%).
- Egzamin zewnętrzny to „fotografia dnia: tu i teraz”. W raportach o egzaminach odnajdujemy wyniki ogólne oraz z podziałem na zadania i wymagania ogólne. Można przeprowadzić analizę wyników egzaminów pod kątem obszarów wiedzy. Wskazane jest ostrożne podejście do tych analiz, bowiem dla wymagań ogólnych i obszarów wiedzy reprezentantami są niewielkie liczby zadań (1–7). Wynik egzaminu jest zależny od struktury egzaminu, populacji uczniów, kontekstu, ale również od trwałości wiedzy.

Bibliografia

- Arkusz próbny *Egzamin ósmoklasisty. Matematyka*, 19.12.2018 r., CKE, Warszawa.
- CKE, *Ekonomiczne oraz geopolityczne uwarunkowania zróżnicowania egzaminów zewnętrznych, Społeczne uwarunkowania zróżnicowania wyników egzaminów, Psychologiczne i biologiczne uwarunkowania zróżnicowania wyników egzaminów*, „Biuletyn Badawczy” nr 11, 12, 13, Warszawa 2007.
- Egzamin ósmoklasisty. Matematyka. Zestaw zadań. Materiał ćwiczeniowy dla uczniów i nauczycieli*, OKE w Krakowie, marzec 2019.
- Garszczyński F., *Ile matematyki jest w fizyce?*, „Informator Oświatowy” nr 4/2018, ODN w Słupsku.
- Gruszczyk-Kolczyńska E., *Niepowodzenia w uczeniu się matematyki u dzieci z klas początkowych. Diagnoza i terapia*, „Prace Naukowe Uniwersytetu Śląskiego”, nr 553, Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, Katowice 1985.
- Informator o egzaminie ósmoklasisty od roku szkolnego 2018/2019. Zasady przeprowadzenia i przystępowania do egzaminu*, CKE, Warszawa 2017.
- Informator o egzaminie ósmoklasisty z matematyki od roku szkolnego 2018/2019*, CKE, Warszawa 2017.
- Kreft A., *Matematyka w biologii*, „Informator Oświatowy” nr 1/2020, ODN w Słupsku.
- Matematyka z kluczem*. Program nauczania matematyki dla klas 4–8 szkoły podstawowej. Nowa Era, Warszawa.
- Niemierko B., *Kształcenie szkolne. Podręcznik skutecznej dydaktyki*, WAiP, Warszawa 2007.
- Niemierko B., *Pomiar wyników kształcenia*, WSiP, Warszawa 1999.
- Paczkowski J., *Czy uczniowie klas ósmych mogli lepiej napisać egzamin z matematyki?*, „Informator Oświatowy” nr 4/2019, ODN w Słupsku.
- Paczkowski J., *Matematyka bez funkcji w nowej podstawówce*, „Informator Oświatowy” nr 3/2018, ODN w Słupsku.
- Paczkowski J., *Podstawa programowa z matematyki w szkole średniej od 2019 r.*, „Informator Oświatowy” nr 4/2018, ODN w Słupsku.
- Paczkowski J., *Rozwijanie kompetencji matematycznych uczniów*, „Informator Oświatowy” nr 1/2020, ODN w Słupsku.
- Przykładowy arkusz *Egzamin ósmoklasisty od roku szkolnego 2018/2019. Matematyka*, CKE, Warszawa 2017.
- Wojciechowska K., *Zastosowanie taksonomii celów nauczania początkowego matematyki do interpretacji programu nauczania* [w:] B. Niemierko (red.), *Diagnostyka edukacyjna*, Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego, Gdańsk 1994.