

Ewa Ludwikowska

Kujawsko-Pomorskie Centrum Edukacji Nauczycieli w Bydgoszczy

Myślenie matematyczne uczniów szkół ponadgimnazjalnych na przykładzie uczniów województwa kujawsko-pomorskiego

Niedostatek badań wyjaśniających

W ostatnich kilku latach kompetencje matematyczne nabierają coraz większego znaczenia i są omawiane na najwyższym szczeblu strategicznym w Europie i na świecie (Eurydice, 2012; Sternberg, 2009; Tall, 2013). Kształcenie matematyczne nie powinno koncentrować się wyłącznie na wyćwiczeniu określonych algorytmów, pamięciowym wyuczeniu twierdzeń czy rozwiązywaniu zadań o powtarzalnym schemacie. Powinno sprzyjać rozwijaniu myślenia ucznia, zdolności uczenia się i twórczego podchodzenia do problemów. Dotychczas podejmowane w Polsce badania, których przedmiotem były osiągnięcia szkolne uczniów szkół średnich i ponadgimnazjalnych z matematyki, są na ogół badaniami z lat 80. i 90. ubiegłego wieku (Niemierko i Klimińska, 1984; Nowik, 1988; Zawal-Jarosik, 1990; Koszłajda, 1990), w wielu przypadkach przynoszące wyłącznie informację o wynikach nauczania, rzadziej dotyczyły badania myślenia matematycznego uczniów, w tym rozumowania i argumentacji oraz rozwiązywania problemów (IBE, 2012). Wszystkie te badania wskazały na niezadowalający poziom osiągnięć szkolnych, w szczególności opanowania umiejętności złożonych, jednak nie zasugerowały wyjaśnienia przyczyn takiego stanu. Szczególną uwagę zwrócić należy na fakt nieznacznego wykorzystania przez system edukacji w Polsce wyników egzaminu maturalnego z matematyki, który wszedł do praktyki egzaminacyjnej od roku 2005, jako przedmiot obowiązkowy od roku 2010, a w nowej formule od roku 2015. Pogłębione analizy wyników matury z matematyki dokonywane przez ekspertów matematyki pracujących w Centralnej Komisji Egzaminacyjnej i okręgowych komisjach egzaminacyjnych oraz formułowane przez nich rekomendacje do pracy szkół nie zostały, w moim odczuciu, należycie wykorzystane przez szkoły.

W chwili obecnej można stwierdzić niedostatek badań oraz brak zadowalającej diagnozy umiejętności złożonych polskich uczniów w zakresie matematyki na poziomie szkoły ponadgimnazjalnej. W tej perspektywie zasadne staje się zbadanie poziomu i właściwości myślenia matematycznego, dokonanie diagnozy opanowania przez uczniów szkół ponadgimnazjalnych umiejętności myślenia (w ujęciu ogólnym) oraz dokonanie weryfikacji empirycznej hipotezy istnienia związku pomiędzy myśleniem matematycznym uczniów a myśleniem w ujęciu ogólnym, a także czynnikami osobistymi (płeć, wiek szkolny, kontrola nad sytuacją zadaniową) i zewnętrznymi związanymi z uczniem (zakres kształcenia matematycznego, lokalizacja szkoły, typ szkoły).

Planowane badanie myślenia matematycznego

Myślenie (*thinking*) to operacje umysłowe, za pomocą których człowiek przetwarza informacje zawarte w spostrzeżeniach, wyobrażeniach i pojęciach (Strelau, 2000). **Matematyczne myślenie** (*mathematical thinking*) rozumiane jest jako dynamiczny proces, który rozszerza rozumienie zakresu pojęcia poprzez uabstrakcyjnianie niektórych jego własności i uogólnianie wyników dla szerszych klas przedmiotów, umożliwia radzenie sobie z coraz bardziej złożonymi ideami, rozwija umiejętność wykorzystania narzędzi matematyki w życiu codziennym, formułowania sądów opartych na rozumowaniu matematycznym oraz rozwiązywaniu problemów. Rozwija także zdolność panowania nad stanami psychicznymi i emocjonalnymi. Najczęściej spotykane czynności myślenia to rozumowanie i argumentowanie oraz rozwiązywanie problemów (definicja własna, oprac. na podstawie: Mason, Stacey i Burton, 2010; Haman, 2009; Niss, 2003; Sternberg, 2009; Tall, 2013; Strelau, 2000).

Z. Krygowska (1977) opisała na poziomie nauczania szkolnego trzy typy rozumowań matematycznych: wnioskowanie empiryczne, rozumowanie intuicyjne oraz rozumowanie formalne. I choć proces rozumowania i dowodzenia jest integralnym składnikiem matematyki (Hanna, 1995, 2009; Hersh, 2009 za: Otten, Gilberston i in., 2014), to w ocenie badaczy amerykańskich nie został pomyślnie wdrożony do matematyki szkolnej, np. w USA czy Kanadzie rozumowanie i dowodzenie w dużej mierze ogranicza się wyłącznie do geometrii (Hanna & de Burn, 1999; Herbst 2002 za: Otten, Gilberston i in., 2014), również w Niemczech (Heinze i in., 2008) dowód często sprowadza się tylko do prostego stwierdzenia: „tak, jest tak jak na rysunku” (Chazan, 1993).

Planowane przeze mnie badanie myślenia matematycznego uczniów szkół ponadgimnazjalnych będzie dwuetapowe. Przeprowadzone zostanie metodą testowania z użyciem dwóch testów. W pierwszym etapie (narzędzie 1) zdiagnozowana zostanie zdolność myślenia w ujęciu ogólnym, w drugim (Test matematycznego myślenia TM – autorskie narzędzie 2) – poziom i właściwości myślenia matematycznego. Diagnoza, wpisana w paradygmat badań normatywnych, przeprowadzona zostanie w wymiarze (1) właściwości i poziomu rozumowania i argumentacji oraz w wymiarze (2) właściwości i poziomu rozwiązywania problemów na reprezentatywnej próbie uczniów szkół ponadgimnazjalnych województwa kujawsko-pomorskiego.

Wyniki zdających egzamin maturalny z matematyki w województwie kujawsko-pomorskim na poziomie podstawowym od kilku lat utrzymują się na poziomie wyników krajowych (tab. 1). Szczególnie zauważalna jest porównywalność w odniesieniu do poziomu rozszerzonego matury (tab. 2), stąd podjęcie decyzji o doborze reprezentatywnej próby badawczej z terenu tego województwa.

Tabela 1. Zestawienie łatwości standardów wymagań egzaminacyjnych/wymagań ogólnych w latach 2013–2016 zdających maturę z matematyki w województwie kujawsko-pomorskim i kraju w obszarze myślenia matematycznego (w %)

POZIOM PODSTAWOWY

Standard wymagań egzaminacyjnych/ Wymaganie ogólne	2013		2014		2015		2016	
	woj. kuj.-pom.	kraj	woj. kuj.-pom.	kraj	woj. kuj.-pom.	kraj	woj. kuj.-pom.	kraj
III – Modelowanie matematyczne	47	54	54	54	49	49	47	40
IV – Użycie i tworzenie strategii	45	49	49	41	51	43	61	52
V – Rozumowanie i argumentacja	17	24	26	18	22	25	24	26

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych CKE i OKE Gdańsk.

Tabela 2. Zestawienie łatwości standardów wymagań egzaminacyjnych/wymagań ogólnych w latach 2013–2016 zdających maturę z matematyki w województwie kujawsko-pomorskim i kraju w obszarze myślenia matematycznego (w %)

POZIOM ROZSZERZONY

Standard wymagań egzaminacyjnych/ Wymaganie ogólne	2013		2014		2015		2016	
	woj. kuj.-pom.	kraj	woj. kuj.-pom.	kraj	woj. kuj.-pom.	kraj	woj. kuj.-pom.	kraj
III – Modelowanie matematyczne	69	78	46	42	29	30	33	32
IV – Użycie i tworzenie strategii	56	51	55	50	38	36	22	22
V – Rozumowanie i argumentacja	44	42	41	39	34	31	18	18

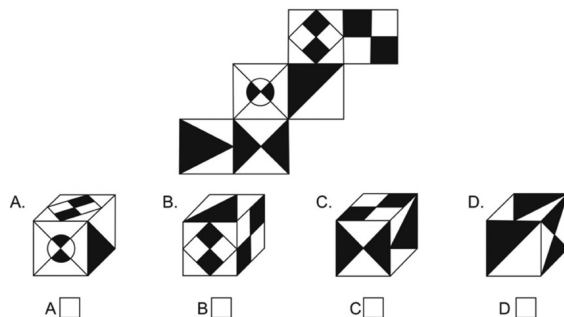
Źródło: opracowanie własne na podstawie danych CKE i OKE Gdańsk.

Poniżej prezentuję przykładowe cztery zadania, które zostaną wykorzystane w konstrukcji narzędzia 2 (test TMT) do diagnozy opanowania operacji umysłowych i poznawczych charakterystycznych dla myślenia matematycznego.

Przykład 1 jest zadaniem problemowym, w którym uczeń dostrzega i ustala związki i zależności, manipuluje wyobrażeniami i ocenia rezultat.

Przykład 1.

Który z sześciątów powstanie po złożeniu danej figury?



Przykład 2 to zadanie, w którym podczas rozwiązywania uczeń przeprowadza rozumowanie i argumentuje, uzasadniając otrzymane wyniki; dobiera i podaje trafne argumenty uzasadniające poprawność.

Przykład 2.

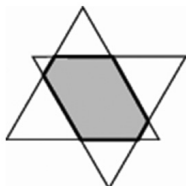
Szymon, Marek i Paweł mają razem 13 modeli samochodów. Ile modeli może mieć każdy z nich, jeśli wiadomo, że Marek ma ich mniej niż Paweł, ale więcej niż Szymon. Podaj wszystkie możliwości. Przedstaw i uzasadnij swoje rozumowanie.

Przykład 3 to problem złożony, w którego rozwiązaniu uczeń tworzy własną strategię rozwiązania (zaplanuje i wykona ciąg czynności prowadzących do rozwiązania, niewynikający wprost z treści zadania).

Przykład 3. (zadanie inspirowane źródłem: zadania.info.pl)

Dwa trójkąty równoboczne o obwodach po 12 cm nałożono na siebie tak, że odpowiednie pary ich boków są do siebie równoległe (rys.).

Jaki jest obwód zacieniowanego sześciokąta? Przedstaw swoje rozumowanie.



I wreszcie *Przykład 4* to złożony problem, którego rozwiązanie wymaga od ucznia wykorzystania informacji rysunkowej (posługiwania się graficznym schematem), prowadzącego do odkrywania istotnych informacji; dostrzegania prawidłowości, spostrzegania reguły, manipulowania wyobrażeniami. Uświadamianie sobie zastosowanej strategii prowadzi w końcu do uogólniania (tzn. łączenia cech wspólnych obiektów).

Przykład 4.

Dziewczynka buduje figury w sposób, jaki pokazano na rysunku poniżej.



1 klocek 1+3 =4 klocki 1+3+5=9 klocków 1+3+5+7=16 klocków

1. Zbuduj piątą figurę i podaj, z ilu klocków się składa.
2. Ile klocków potrzeba do zbudowania figury 6? Wyjaśnij, jak znalazłeś/znalazłaś odpowiedź.
3. Znajdź sumę $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19$. Pokaż i wyjaśnij, jak znalazłeś/znalazłaś odpowiedź.
4. Ile klocków jest w figurze 50? Wyjaśnij, jak znalazłeś/znalazłaś odpowiedź.
5. Ile klocków jest w n -tej figurze?

Rekomendacje sformułowane na podstawie analizy wyników planowanego przeze mnie badania, z afiliacją Uniwersytetu Kazimierza Wielkiego w Bydgoszczy, będą użyteczne dla praktyki edukacyjnej odnośnie do rozwijania myślenia matematycznego, posłużą bowiem do opracowania oferty warsztatowej skierowanej do nauczycieli w zakresie rozwijania myślenia i myślenia matematycznego. Jestem przekonana, że dostarczą ważnych informacji w projektowaniu zmian funkcjonowania wybranych ogniw edukacji, a w efekcie doprowadzą do zmiany w sposobie nauczania matematyki przez nauczycieli.

Bibliografia

- Dylak S., *Architektura wiedzy w szkole*, Wydawnictwo Difin, Warszawa 2013.
- Filipiak E. (red.), *Nauczanie rozwijające we wczesnej edukacji według Lwa S. Wygotskiego. Od teorii do zmiany w praktyce*, ART Studio, Bydgoszcz 2015.
- Filipiak E., *Rozwijanie zdolności uczenia się. Z Wygotskim i Brunerem w tle*, Gdańskie Wydawnictwo Psychologiczne, Gdańsk 2012.
- Krygowska Z., *Zarys dydaktyki matematyki*, WSiP, Warszawa 1997.
- Mason J., Burton L., Stacey K., *Thinking Mathematically*, Pearson Education Limited, wyd. 2, 2010.
- Semadeni Z., *The role of meaning in mathematical reasoning*, „Dydaktyka Matematyki” 24. Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, 2002.
- Sternberg J., Ben-Zeew T., *The Nature Mathematical Thinking*, Routhledge, New York 2009.
- Strelau J. (red.), *Psychologia – podstawy psychologii. Podręcznik akademicki, cz. 1*, GWP, Gdańsk 2000.
- Tall D., *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Academic Publisher, London 2002.
- Tall D., *How Human learn to think mathematically*, Cambridge University Press (USA), 2013.
- Zimbaro P.G. (red.), *Psychologia i życie*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1999.

Raporty

- Eurydice, *Nauczanie matematyki w Europie. Ogólne wyzwania i strategie krajowe*, FRSE, Warszawa 2012.
- IBE, *Szkoła Samodzielnego Myślenia*, IBE, Warszawa 2013.