UNIWERSYTET SZCZECIŃSKI

NR 58 MATERIAŁY * KONFERENCJE 2000

KRYSTYNA SZYSZYŁO
Uniwersytet Szczeciński

DIAGNOSTYCZNA, KSZTAŁCĄCA I INSPIRUJĄCA FUNKCJA BŁĘDÓW UCZNIÓW W PROCESIE NAUCZANIA MATEMATYKI

1. BŁĘDY I ICH KLASYFIKACJE

Błąd to różnica między stanem rzeczywistym a wzorcem[1]. Stanowi rozstrzygnięcie typu: prawda–fałsz. W matematyce tym rozstrzygnięciom poddawane są funkcje zdaniowe i zdania logiczne. Powszechnie uznaje się, że uczeń popełnił błąd, gdy jego ustalenie o zdaniu matematycznym jest fałszywe. Błędy są swoistym kompendium wiedzy; każdy akt poznawczy implikuje konflikt wewnętrzny, w którym często swe źródło ma błąd. Na błędy uczniów w procesie kształcenia matematycznego można spojrzeć wieloaspektowo i dokonywać ich wielopłaszczyznowej analizy. Z tego powodu ich pełna klasyfikacja jest dość trudna i uważana przez niektórych dydaktyków matematyki za zadanie niecelowe. W ciągu ostatnich lat wielu autorów prezentowało zróżnicowane problemowo typologie błędów, przyjmując za ich podstawę następujące kryteria:

[1] T. Tomaszewski: *Ślady i wzorce*. Warszawa 1984, s. 16.

a) w aspekcie metody matematycznej: błędy definicji[2], twierdzeń[3], dowodów, błędy obliczeniowe i logiczne;
b) w aspekcie dziedzin wiedzy matematycznej: błędy arytmetyczne, algebraiczne[4], geometryczne[5];
c) w aspekcie czynności umysłowych uczestniczących w procesie rozwiązywania problemu matematycznego: błędy spostrzegania, analizowania, syntezy, abstrahowania, specyfikowania, uogólniania, klasyfikowania, porównywania, porządkowania, kodowania, dekodowania;
d) w aspekcie hipotetycznych przyczyn: błędy spowodowane trudnościami językowymi[6], brakiem wiedzy, złą asocjacją, nadmierną giętkością myślenia, sztywnością myślenia[7];
e) w aspekcie wykorzystania błędu ucznia w procesie dydaktycznym matematyki: błędy inspirujące, błędy kształcące;
f) w aspekcie procesu kształcenia matematycznego: błędy dydaktyczne[8], psychologiczne, heurystyczne, prakseologiczne, diagnostyczne.

W poglądach współczesnych dydaktyków na temat błędów zauważa się określony stosunek do błędu w uczeniu się matematyki. Uznanym faktem jest obecność błędu, w naturalny sposób związana z procesem zarówno uczenia się ma-

---

[2] Z. Krygowska, S. Kulczycki, S. Straszewicz: *Nauczanie geometrii w klasach licealnych.* Warszawa 1959; Z. Zamorska: *Pewne problemy percepcji definicji matematycznej przez uczniów szkoły średniej.* Rzeszów 1982.

[3] S. Turnau: *Elementy logiki w nauczaniu matematyki. Wybrane zagadnienia metodyki matematyki.* Warszawa 1971; B.J. Nowecki: *Badania nad efektywnością kształtowania pojęć twierdzenia i dedukcji u uczniów klas licealnych w zmodernizowanym nauczaniu matematyki.* Kraków 1978.

[4] Z. Krygowska: *Zrozumieć błąd w matematyce.* „Dydaktyka Matematyki" nr 10. Warszawa 1989, s. 142–147.

[5] B. Parzysz: *„Knowning" vs. „Seeing". Problems of the plane representation of space geometry figures.* „Educational Studies in Mathematics" 1988, No 19, za M. Ciosek: *Błędy popełniane przez uczących się matematyki i ich hipotetyczne przyczyny.* „Dydaktyka Matematyki" nr 13. Kraków 1992, s. 65.

[6] N. Rouche: *Problemy dydaktyczne błędów.* „Dydaktyka Matematyki" nr 11. Warszawa 1989, s. 133–163.

[7] M. Ciosek: *op.cit.*, s. 65.

[8] A. Sierpińska: *O niektórych trudnościach w uczeniu się pojęcia granicy na podstawie studium przypadku.* „Dydaktyka Matematyki" nr 4. Warszawa 1985, s. 107–167; M. Ćwik: *Reakcja nauczyciela na błąd popełniony przez ucznia w procesie tzw. kontroli ciągłej.* W: *Problemy kształcenia i wychowania*, nr 2. Nowy Sącz 1987, s. 72–94.

tematyki, jak i tworzenia jej w procesie uczenia się. Jest on implikacją różnych procesów długofalowych, złożonych, a także krótkotrwałych, lecz znamiennych. Kwalifikacja błędu powinna być podstawą pytania nauczyciela o jego źródło i wartość. Błędy reprodukcji wiedzy należą do tej kategorii, których łatwo wskazać istotę; występują w sytuacjach stosowania definicji, twierdzenia, algorytmu. Błędy twórczości, występujące w rozwiązaniach problemów otwartych, wymagające od rozwiązującego aktu twórczego, oraz błędy metodologiczne bywają trudniejsze do analizy ze względu na złożoność uwarunkowań wystąpienia. Wyłonione rodzaje błędów spotyka się na różnych poziomach edukacji matematycznej. Organizacja i sposoby poznawania wiedzy teoretycznej i dydaktycznej matematyki przez przyszłych nauczycieli w toku studiów pozostaje w ścisłym związku z jakością uzyskiwanych efektów dydaktycznych ich uczniów. Z obserwacji praktyki szkolnej, wypowiedzi uczących się wynika, że ilościowy charakter diagnozy osiągnięć szkolnych wzmacnia narastanie i kumulację braków wiedzy matematycznej. Uzyskiwane masowo pomiary dydaktyczne nie wyjaśniają bowiem wątpliwości z pola pytań: jak i dlaczego? w jakiej strukturze wiedzy i w jakich jej zakresach powstały luki?

2. *ŹRÓDŁA BŁĘDÓW*

Przyczyn niektórych błędów, zwłaszcza metodologicznych, należy upatrywać w błędach nauczania; trudno nie zgodzić się ze zdaniem H. Freudenthala: „uczeń, który popełnia błędy, jakie są do zrobienia, robi to razem z tym, kto go uczy. Przynajmniej częściowo rola błędu ma związek z rolą nauczającego w procesie uczenia się"[9]. Nauczanie matematyki powinno być prezentacją matematyki w stadium tworzenia, a nauczyciel pełnić rolę inspiratora i organizatora matematycznego odkrycia. Organizacja matematycznego odkrycia wymaga określonej wiedzy merytorycznej i kultury matematycznej nauczyciela. Błędy w organizacji odkrycia wynikają często z niewłaściwej wykładni procesu. Odkrywanie pojęć i metod w procesie działalności matematycznej jest nauczaniem

[9] H. Freudenthal: *Błędy nauczyciela – analiza dydaktyczna samego siebie*. „Dydaktyka Matematyki" nr 11. Warszawa 1989, s. 109.

zgodnym z celami kształcenia matematycznego na każdym szczeblu nauczania – także z postulatami dydaktyki matematyki. Błąd może być znakiem określonych nieprawidłowości tkwiących poza procesem organizacji kształcenia, na przykład przeszkody epistemologiczne funkcjonujące jako nie uświadomione schematy myślenia, nabyte w drodze naśladownictwa i praktyki, nie będące przedmiotem refleksji, stosowane jako automatyzmy. Pokonywanie tego rodzaju przeszkód polega na uświadomieniu i wyróżnieniu danego schematu jako metody o określonym obszarze stosowalności[10]. Zbyt częste odwoływanie się do algorytmów jako gotowych, skutecznych i ułatwiających przepisów, wiodących do gwarantowanych sukcesów w procesie rozwiązywania problemów, może szkodzić rozwiązaniu określonego zagadnienia; dotyczy to wzmocnień pochodzących od nauczanych treści matematycznych, będących bezpośrednią przyczyną (niektórych) błędów[11].

Języki opisów jako hipotetyczne przyczyny niektórych błędów to dość często spotykane zjawisko w nauczaniu. Istotą trudności jest tutaj zestawienie języka naturalnego ze sztucznym, sformalizowanym, hermetycznym językiem symboli. Bardzo często interpretacja nazwy pojęcia w języku naturalnym prowadzi do błędu na gruncie matematycznym[12]. W poznaniu obiektów dość znaczną rolę odgrywa kontekst, ukierunkowujący rozumowanie i jakościowo je determinujący. W matematycznym poznaniu może on mieć, oprócz pozytywnego znaczenia, negatywny wpływ, blokujący – i to czasem dość skutecznie – wybór stosowanej strategii rozwiązania, oraz implikować błąd heurystyczny.

Poza już przedstawionymi przyczynami błędów dość często wynikają one z przeciążeń informacyjnych w postaci wskazówek, zbyt dużej liczby zadań do rozwiązania w określonym czasie, jednakowym dla wszystkich uczniów, oraz obciążeń metapoznawczych związanych z wyborem określonej strategii, klasyfikacją problemu, wartościowaniem w kontekście subiektywnie pojętych możliwości sprawczych.

---

[10] A. Sierpińska, M. Wiwegier: *O powstawaniu przeszkód epistemologicznych związanych z pojęciem nieskończoności u dzieci 10–12 i 14 letnich*. „Dydaktyka Matematyki" nr 13. Kraków 1992, s. 253.

[11] Z. Dybiec: *Błędy w procesie nauczania matematyki*. Kraków 1995, s. 34.

[12] *Ibidem*.

Przyczyną niepowodzeń w rozwiązywaniu zadań oprócz braku wiedzy jest także brak odpowiednio wyćwiczonych sprawności metapoznawczych[13], realizowanych przez metakomponenty. Komponenta jako proces informacyjny charakteryzuje się określonymi właściwościami, czyli czasem trwania, trudnością poznawczą, prawdopodobieństwem wykonania, możliwością popełnienia błędu[14]. Metakomponenty jako procesy regulacyjne wyższego rzędu, polegające na planowaniu, monitorowaniu, podejmowaniu decyzji w toku realizacji dowolnego zadania, są szczególnie ważne i silnie zaznaczone w poznawaniu matematycznym, warunkują bowiem w znacznym stopniu skuteczność i bezbłędność określonego problemu. Z każdą komponentą wyróżnioną w taksonomii Sternberga, czyli decyzji, selekcji komponent, selekcji reprezantacji poznawczych, wyboru strategii kombinowania komponent, monitorowania, przemieszczenia uwagi, wrażliwości na informacje zwrotne, łączą się dyspozycje poznawcze, które należałoby uczynić przedmiotem uwagi i ćwiczeń w procesie dydaktycznym matematyki. Uporczywe trzymanie się wybranej metody rozwiązywania określonego problemu, pomimo braku sukcesu, a także błędów heurystycznych, to rezultat braku elastyczności w przechodzeniu między czynnościami i metaczynnościami[15].

Selekcja komponent należąca do procesów regulacyjnych łączy się z rozstrzygnięciami typu: natychmiastowa realizacja–ogólna refleksja. Według Sternberga, natychmiastowa realizacja implikuje komponent realizacji, jeśli refleksja to selekcja dotyczy komponent wiedzy albo zmiany strategii. Trzecia grupa to metakomponenty dotyczące wyboru kodów informacji występujących w toku rozwiązywania określonego zadania. Skuteczność rozwiązania zadania, jak pokazał to Sternberg, zależy od preferencji podmiotu do określonego kodu, natomiast Pavio dowiódł zarówno ich istnienia, jak i stałości charakteru. Na uwagę zasługuje fakt, że owe preferencje mogą nie być zgodne z wymaganiami zadania[16]. Jest to ważne ustalenie dla praktyki nauczania–uczenia się, ponieważ uwzględnienie preferencji ułatwia wzajemne komunikowanie z zachowaniem

---

[13] Cz. Nosal: *Psychologiczne modele umysłu*. Warszawa 1990, s. 121.

[14] Z. Dybiec: *Błędy w procesie nauczania matematyki*. Kraków 1995, s. 119.

[15] *Ibidem*, s. 38.

[16] *Ibidem*, s. 39.

indywidualizacji preferencji. W procesie uczenia się matematyki każdy uczeń nabywa określonych preferencji do różnych oznaczeń, symboli, graficznych ilustracji, których stosowania nie tylko nie potrafi zaprzestać, ale także przenieść z jednej sytuacji do innej.

Trzy ostatnie grupy komponent są istotne dla hipotetycznych przyczyn błędów. Monitorowanie w połączeniu z procesami świadomego przemieszczenia uwagi na dostępne dane i na odpowiednim poziomie reakcji na informacje zwrotne to podstawowy element skutecznej autokontroli, bez której nie ma pewności co do poprawności rozstrzygnięć. Od reakcji na informacje zwrotne zależy skuteczność rozwiązywania zadania. Łączy się z tym zjawisko sztywności i giętkości zachowań. Nadmierna sztywność powoduje blokadę dopływu informacji zwrotnej i perseweracją czynności pomimo widocznych efektów, co w przypadku rozwiązywania zagadnienia matematycznego utrudnia odkrywanie i jest błędem heurystycznym; nadmierna giętkość powoduje chaotyczność działań. Nie wyćwiczone procesy podejmowania decyzji poznawczych, procesy autoregulacyjne, sprawności obiektywnej interpretacji własnych czynności, umiejętności świadomego przemieszczania uwagi – prowadzą do różnych błędów matematycznych.

3. *WARTOŚCIOWANIE BŁĘDÓW UCZNIÓW*

Zmiana funkcji oceny wymaga zmiany jej miejsca w procesie dydaktycznym z uwzględnieniem prawa ucznia do błędu. Błędy i ocenę w tym aspekcie należy traktować jako kolejne jej ogniwo. Łączy się to również ze zmianą postawy nauczyciela oraz odpowiednią interpretacją treści programów kształcenia. Zadaniem nauczyciela jest stworzenie uczniom warunków dydaktycznych i okazji do konstrukcji wiedzy, czyniąc jej przedmiotem problemy matematyczne tworzone na podstawie analizy błędów uczniów diagnozowanych i wartościowanych w toku działalności matematycznej ucznia w procesie kształcenia matematycznego.

Błędne rozumowania uczniów należy traktować jako robocze hipotezy, czyniąc je problemami matematycznymi. Stawianie i weryfikacja hipotez pełni w matematyce bardzo ważną rolę, ponieważ stawianie błędnych hipotez i po-

szukiwanie kontrprzykładów jest równie ważne, jak uzasadnianie prawdziwych tez. Prowokowanie błędu, wątpienie, błędne rozumowania w nowo poznawczo sytuacjach, prowadzące uczniów do uzyskania nowej jakościowo wiedzy, czynią matematykę interesującą, umożliwiają głębsze rozumowanie matematyczne, logiczne i metodologiczne poznawanej wiedzy. Podawanie w wątpliwość uzyskanych rezultatów kształtuje intelektualny i emocjonalny dystans do tego, co wydaje się oczywiste i pewne, wpływa na poziom umiejętności dostosowywania metod do zmieniającej się sytuacji badawczej, kształcenia myślenia operatywnego i abstrahowania, eliminuje sztywność myślenia oraz odwoływanie się do sprawdzonych schematów, umożliwia stawianie odkrywczych pytań oraz wybór sposobów poszukiwania odpowiedzi.

Dokładna analiza błędów uczniów pozwala na wgląd w sposoby ich myślenia[17], a uzyskany tą drogą materiał badawczy może być podstawą do wprowadzenia określonych koncepcji i metod nauczania. Przeprowadzone w angielskich szkołach badania (A. Bellego) dowiodły, że metoda dyskusji nad konfliktem poznawczym jest skuteczniejsza dydaktycznie niż tak zwane douczanie. Podczas prowadzonych przez A. Bellego badań eksperymentalnych uczniowie najpierw dyskutowali w grupach nad problemem, po czym następowała ogólna dyskusja. Uważano, że uczeń ma więcej odwagi w przedstawianiu i obronie poglądu wcześniej zaakceptowanego w grupie. Równie znaczące jest uzgodnienie z klasą celów wspólnej pracy; najistotniejszy cel, to eliminacja niechęci do wypowiadania się będąca przeszkodą w usunięciu błędnych przekonań i pojęć, stanowiących bezpośrednią implikację trudności w nauce, co potwierdzają także badania prowadzone przez autorkę[18]. Większość nauczycieli ma fałszywe przeświadczenie o niskiej efektywności dydaktycznej samodzielnej pracy z tekstem matematycznym. Moje badania dowiodły, że nieprawidłowości postępowania dydaktycznego nauczyciela, zwłaszcza jego nadmierna aktywność, determinują jakościowo postawę ucznia i uzyskiwane przezeń wyniki w pracy z tekstem matematycznym. Rozwiązywanie zadań na poszukiwanie błędów należy wprowadzać już do młodszych klas; znalezienie błędu jest równie satys-

---

[17] Zob. także: A. Bell: *Systematyczne użycie konfliktu poznawczego w nauczaniu – trzy eksperymenty.* „Dydaktyka Matematyki" nr 13. Kraków 1992, s. 9.

[18] K. Szyszyło: *Wpływ zróżnicowanych zadań na realizację celów dydaktycznych matematyki.* Dysertacja doktorska. Szczecin 2000 (maszynopis).

fakcjonujące dla dziecka jak rozwiązanie zadania. Znajdowanie błędów w rachunkach arytmetycznych lub algebraicznych, czy popełnianych przy rozwiązywaniu równań może prowadzić do głębszych refleksji, pozwalających uświadomić uczniowi, że ostatecznie rachunki opierają się na kilku prostych prawach arytmetyki, które należy znać i stosować; rozwiązywanie równań to stosowanie twierdzeń, a nie jedynie postępowanie według ustalonych szablonów.

Zważywszy na znaczenie błędów uczniów, diagnoza efektów kształcenia matematycznego nie powinna ograniczać się wyłącznie do pomiaru ilościowego. Błędy w rozumowaniach uczniów powinny być przedmiotem systematycznej analizy i refleksji, a uzyskane rezultaty przedkładane w formie problemów twórcom programów, autorom podręczników metodycznych, a także nauczycielom matematyki, których należałoby włączać do twórczej dyskusji. Diagnoza błędu powinna implikować podejmowanie następujących działań dydaktycznych:

- uświadomienie uczniom konsekwencji, do jakich prowadzi nieprzestrzeganie twierdzeń, własności, praw; kształtowanie krytycyzmu i samokrytycyzmu;
- zaznajamianie uczących się z istotnymi brakami w określonym rozumowaniu, sprzyjające wzniesieniu na wyższy poziom poznania matematycznego i prowadzące w naturalny sposób do nowych problemów;
- kształcenie umiejętności poprawnego rozumowania ściśle związanego z kształceniem języka matematycznego, w szczególności jego elementów, jakim jest symbolika matematyczna;
- kształtowanie poprzez matematykę określonych, społecznie akceptowanych postaw, oraz ukazywanie jej związków z życiem i różnorodną aktywnością człowieka.