Anna Malenda
Uniwersytet Gdański

ROZWIĄZYWANIE ZADAŃ MATEMATYCZNYCH PRZEZ UCZNIÓW SZKÓŁ PODSTAWOWYCH I PRZEZ STUDENTÓW MATEMATYKI

„Brak jest wyników szerszych badań procesu nauczania i uczenia się matematyki w wyższej uczelni. Brak odpowiednio udokumentowanej wiedzy powoduje, że wypowiedzi na temat kształcenia nauczycieli (...) opierają się na utrwalonych stereotypach, własnych przekonaniach poszczególnych osób, ich doświadczeniu i własnych, z konieczności wycinkowych obserwacjach"[1]. Ta wypowiedź prof. Z. Semadeniego, jak również funkcjonowanie od niedawna trzyletnich zawodowych matematycznych studiów nauczycielskich[2] stały się przyczyną podjęcia przeze mnie badań dotyczących problematyki kształcenia przyszłych nauczycieli matematyki.

Nadmienić należy, iż w dyskusji nad sensem powołania tychże studiów prof. R. Duda wysunął m. in. pogląd, iż: „w szczególności studia nauczycielskie powinny koncentrować się na tej matematyce, która jest w szkole, a sposób prezentacji powinien nadawać się do powtórzenia w szkole. (...) 3-letnie studia zawodowe miałyby charakter bardziej elementarny, a ich celem byłoby wyposażenie studenta w wiedzę i umiejętności oraz rozwinięcie postaw nauczyciela szkoły podstawowej"[3].

W świetle powyższych rozważań, celem podjętych przeze mnie badań było zbadanie dróg matematycznego myślenia studentów I roku matematyki 3-let-

1 J. Waszkiewicz, A. Wojciechowska: *Wstępne opracowanie wyników ankiety eksperymentalnej na temat kształcenia nauczycieli matematyki.* W: *Unowocześnienie procesu dydaktycznego. Model dydaktyk szczegółowych*, red. B. Niemierko, Bydgoszcz 1989, WSP.

2 W Uniwersytecie Gdańskim 3-letnie studia na kierunku matematyki wprowadzone zostały w roku akademickim 1990/91.

3 R. Duda: *Warianty organizacyjne uniwersyteckich studiów nauczycielskich z matematyki.* W: *Unowocześnienie procesu...* s. 260-263.

nich studiów zawodowych jako punkt wyjścia do formułowania programów kształcenia przyszłych nauczycieli matematyki.

Problemy badawcze ujęłam następująco:

1. Jaka jest wiedza matematyczna studentów z zakresu programu szkoły podstawowej?
2. W jakim stopniu studenci w toku rozwiązywania zadań stosują heurystyki, czyli wykazują:
   - zdolność zgłębiania tematu, która objawia się w dokładnym analizowaniu (założeń) matematycznego problemu, w przyjmowaniu różnych punktów wyjścia do rozwiązywania zadania,
   - zdolność przezwyciężania nawyków myślowych, to jest nieposługiwanie się charakterystycznymi dla danego problemu matematycznego schematami rozwiązywania zadań lub w ogóle schematami,
   - pomysłowość, która polega na konstruowaniu różnorodnych ciekawych zadań, pytań,
   - zmyślność, rozumianą jako umiejętność posługiwania się chwytami heurystycznymi, w stosowaniu np. krótszych rozwiązań zadań,
   - oryginalność, czyli budowanie niezwykłych, osobliwych, rzadko spotykanych pytań czy sposobów rozwiązywania zadań,
   - zdolność (umiejętność) argumentowania, to jest uzasadnianie własnych sposobów rozwiązań zadań, własnych odpowiedzi na stawiane pytania.

Sformułowałam następujące hipotezy badawcze:

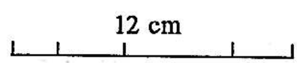
1. Studenci wykazują słabe opanowanie wiedzy matematycznej ze szkoły podstawowej.
2. W toku rozwiązywania zadań studenci posługują się schematami myślowymi.

Badaniami objęłam grupę 80 studentów pierwszych roczników 3-letnich studiów zawodowych na kierunku matematyki Uniwersytetu Gdańskiego oraz, dla porównania, grupę 153 uczniów absolwentów szkół podstawowych, zdających egzamin wstępny do liceów społecznych w Gdańsku. Obie grupy miały tyle samo czasu na rozwiązanie tych samych zadań. Były to zadania z egzaminów wstępnych z matematyki do trzech różnych niepaństwowych gdańskich liceów. Uczniowie rozwiązywali zadania podczas egzaminu wstępnego, zaś studenci – jako jeden z elementów zaliczenia.

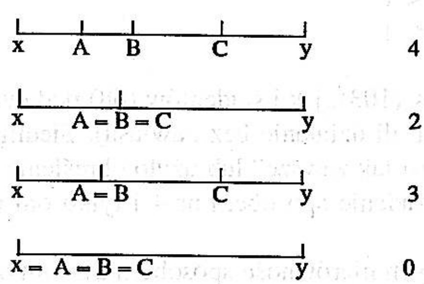
Nie omawiam treści poszczególnych zadań (pełen zestaw w załączeniu). Wyraźnie widać, jak różne były oczekiwania wobec uczniów zdających egzamin do każdej z trzech szkół. Nasuwa się również myśl, że wśród tych zadań są wyróżniane przez Z. Krygowską „zadanie ćwiczenie", „zadanie – zwykłe zastosowanie teorii", a także nazwane przeze mnie „zadaniem na myślenie", a przez Z. Krygowską określone jako „zadanie, którego rozwiązania nie uzyska się na danym poziomie bez pewnej pomysłowości, bez szczypty choćby matematycznej wyobraźni, bo do jego rozwiązania nie wystarcza ani wiedza, ani sprawność techniczna, ani nawet doświadczenie w rozwiązywaniu typowych zadań"[4]. Szczególnie zadania tego typu pozwoliły mi zgłębić sformułowany przeze mnie problem badawczy.

Przykładowo przedstawię studenckie i uczniowskie rozwiązania trzech zadań.

I. Na ile części można podzielić dwunastocentymetrowy odcinek trzema punktami?

(1) 12 : 3 = 4 cm
(2) Odcinek trzema punktami dzielimy na 4 części.
(3) Istnieją trzy rozwiązania: 4, 3, 2.
(4) Rozwiązań jest 4 (obok rysunek: 

)
(5) Zawsze będą 4 części.
(6) Liczba rozwiązań jest bardzo duża.
(7) Liczba rozwiązań to 3.
(8) Na 4 części i miejsca punktów są obojętne.
(9) Punkty (1 lub 2) mogą być końcami odcinka, więc może być różnie.
(10) Na 4, gdy punkty są różne, na 3 gdy dwa punkty pokrywają się, na 2 gdy trzy się pokrywają.
(11)



Rozwiązania oznaczone numerami: 1, 3, 4, 5, 6, 8, 11 to rozwiązania uczniów, zaś 2, 7, 9, 10 studentów. Należy podkreślić, iż wszyscy uczniowie wykonywali rysunki. W 127 uczniowskich pracach pojawiły się próby analizowania zadania, co jest widoczne zarówno w ilustracji graficznej, jak też w stwierdzeniach pojawiających się w rozwiązywaniu zadania (np. 8). W pracach studenckich było zaledwie kilka rysunków, jedynie dwa rozwiązania (nr 9, 10) świadczyły o zgłębieniu problemu. Większość odpowiedzi (53) to nr 2. Studenci zadowolili się po prostu udzieleniem odpowiedzi w ogóle, nie zastanawiając się nawet nad możliwościami rozwiązań, nad jakąkolwiek argumen-

4 Z. Krygowska: *Zarys dydaktyki matematyki*. Część 3. Warszawa 1980, WSiP, s. 38.

tacją. Jeden z uczniów napisał: „wszystko jedno, jaki będzie odcinek", narysował odcinki różnej długości, ale dzielił je tylko na 4 części. Żaden ze studentów nie zauważył, że podział odcinka nie zależy od jego długości.

II. Rozwiąż jak najkrócej nierówność:

$(5 - x)^2 - (x - 5)^2 < 1$

(1) $25 - 10x + x^2 - (x^2 - 10x + 25) < 1$
$25 - 10x + x^2 - x^2 + 10x - 25 < 1$
$0 < 1$

(2) $[(5 - x) + (x - 5)] \cdot [(5 - x) - (x - 5)] < 1$
$0\ (10 - 2x) < 1$
$0 < 1$

(3) $25 - 10x + x^2 - x^2 + 10x - 10 < 5$
$-10x + x^2 - x^2 + 10x < -25 + 10 + 5$
$0 \quad 0$

(4) $[-(x-5)]^2 - (x - 5)^2 < 1$
$0 < 1$

Zarówno większość uczniów (103), jak i studentów (68) podawało rozwiązanie nr 1 (studenci od razu pisali działanie bez nawiasu). Siedmiu uczniów przy zapisie $0 < 1$ napisało: „jest tak zawsze" lub użyło określenia tożsamość. Trzech studentów rozwiązało zadanie sposobem nr 4 i tylko oni napisali, że otrzymali tożsamość.

Kilku uczniów rozwiązujących nierówność sposobem trzecim od początku mylnie umieszczało po lewej stronie nierówności liczbę 5. Sprawiło to, że ostateczny wynik był różny od oczekiwanego, ale dyskusyjne pozostaje uznanie prawidłowości rozwiązania nierówności.

Notabene przyjęcie któregokolwiek z pozostałych rozwiązań za właściwe, za dobre, można również zakwestionować. Można przecież uznać prawidłowość otrzymanego w rozwiązaniu nr 1 wyniku, ale czy droga doń prowadząca jest właściwa? Zastosowany został wzór skróconego mnożenia bez błędów rachunkowych. W drugim rozwiązaniu użyto innego wzoru skróconego mnożenia również bez błędów rachunkowych. Oba rozwiązania są jednak pozbawione komentarzy. W obydwu pojawia się swego rodzaju schemat myślowy: „oto mam możność zastosowania wzoru skróconego mnożenia, umiem go, więc go użyję". Brak jest refleksji typu: „po co ja to liczę?" „jaki wzór opłaca się zastosować?", „może mógłbym zrobić to krócej, sprytniej?". Generalnie, brak namysłu nad sensem tego, co się robi. W tym miejscu pojawia się pytanie, czy każda droga prowadząca do celu jest dobra?

Matematyczny spryt, a może bardzo dobre posługiwanie się różnymi chwytami stosowanymi w technice rachunkowej pojawiło się w rozwiązaniu 4.

Sądząc, iż w przypadku nierówności tego typu wątpliwości co do przyjętego sposobu rozwiązywania pojawią się, gdyby liczbę 5 zastąpić liczbą np. $\frac{2135}{3\sqrt[5]{17}}$ podałam do rozwiązania grupie 23 studentów następującą nierówność:

$$\left(\frac{2134}{3\sqrt[5]{17}} - x\right)^2 - \left(x - \frac{2134}{3\sqrt[5]{17}}\right) < 1$$

Wcześniej studenci ci nie rozwiązywali nierówności $(5 - x)^2 - (x - 5)^2 < 1$. Kilka osób wyraziło zdanie, że bez kalkulatora nie uda im się rozwiązać nierówności bezbłędnie. Jedna napisała: „kwadraty wyrażeń $(x-5)^2$ i $(5-x)^2$ są sobie równe, więc $0 < 1, x \in R$". W ocenie prawidłowości rozwiązania pomijam fakt, że dwukrotnie użyto: „kwadrat wyrażenia (w zapisie słownym i algebraicznym). 10 studentów użyło zapisu analogicznego do rozwiązania nr 2. Pozostali, tj. 12 osób zastosowało wzór skróconego mnożenia z rozwiązania nr 1. Wśród nich aż 8 osób wykonało obliczenie $\left(\frac{2134}{3\sqrt[5]{17}}\right)^2$, które jest zbędne w rozwiązywaniu danej nierówności.

Zatem nawet żmudne rachunki nie zmusiły niektórych studentów do poszukiwania innych rozwiązań aniżeli schematyczne zastosowanie wzoru skróconego mnożenia.

Widać więc, jak trudne jest przezwyciężenie nawyków myślowych, zdobycie się na pomysłowość, odejście od schematu.

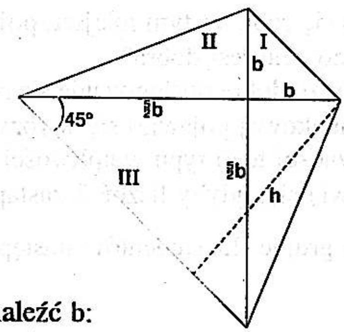
Potwierdzenia tego szukać można w kolejnym zadaniu.

III. W trapezie równoramiennym wysokość ma długość 14 cm, a jego przekątne przecinają się pod kątem prostym i dzielą się w stosunku 2 : 5. Oblicz pole trapezu.

(1) Zadanie sprzeczne, bo tylko w kwadracie przekątne przecinają się pod kątem 90° i to w równym stosunku.

(2) Przekątne przecinają się pod kątem 90° tylko w kwadracie, ale w kwadracie dzielą się na dwie równe części (a nie w stosunku 2 : 5), więc zadanie jest sprzeczne.

(3)



$\frac{b}{x}=\frac{2}{5} \rightarrow x=\frac{5}{2}b$

$P=2P_{II}+P_I+P_{III}$

$P_{II}=\frac{1}{2}b\cdot\frac{5}{2}b \qquad P_I=\frac{1}{2}b^2$

$P_{III}=\frac{1}{2}\cdot(\frac{5}{2}b)^2$

Musimy znaleźć b:

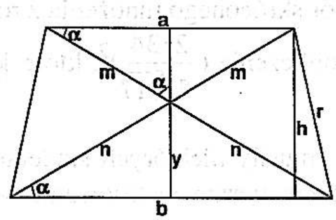
przekątna $\frac{h}{\frac{5}{2}b+b}=\sin 45^o$

$14=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{7}{2}b$

$b=\frac{14\cdot 2\cdot 2}{7\sqrt{2}}=2\cdot\sqrt{2}\ 2=4\sqrt{2}$

$P=2\cdot\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot 4\sqrt{2}+\frac{1}{2}(4\sqrt{2})^2+\frac{1}{2}\cdot(\frac{5}{2}\cdot 4\sqrt{2})^2=80+16+100=196$

(4)



$\alpha=45^o \quad x=\frac{a}{2} \quad y=\frac{b}{2}$

$x+y=\frac{a+b}{2}$

$x+y=h$

$P=\frac{1}{2}(a+b)\cdot h=h^2=14^2=196\ (cm^2)$

(5)

$\frac{m}{n}=\frac{2}{5}$

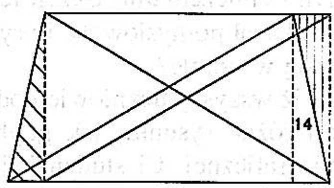
$m^2+n^2=a^2$

$n^2+n^2=b^2 \qquad h=14\ cm$

$h^2+(\frac{a-b}{2})^2=r^2$

$m^2+n^2=r^2$

(6) odgryzam i dogryzam, mam prostokąt i przekątne pod kątem 90^0 więc kwadrat



$P = 14^2 = 196$

Wśród rozwiązań studenckich były rozwiązania 1 i 2, merytorycznie błędne. Być może studenci ci nie rozumieją pewnych pojęć matematycznych, a może, gdyby krytycznie podeszli do własnych odpowiedzi, przeanalizowali swe wypowiedzi, np. próbując narysować trapez nie będący rombem, w którym przekątne przecinają się pod kątem prostym, zapewne nie popełniliby błędu. Podkreślić należy, że takie pomyłki nie zdarzyły się uczniom.

Trzecim sposobem rozwiązali lub podjęli próbę rozwiązywania zadania właśnie takim sposobem zarówno uczniowie (73), jak i studenci (29). Różnice są w oznaczeniach, w zapisach, ale idea jest taka sama.

W rozwiązaniu nr 4 jednego ze studentów istnieją pewne braki w zapisie (np. uzasadnienie równości kątów), ale rozwiązanie to jest krótkie i pomysłowe.

Zdumiewa podjęcie przez studentów (41) piątego sposobu rozwiązania (układ pięciu równań z pięcioma niewiadomymi). Nie wszyscy zapisywali swój pomysł rozwiązania układem równań, ale tak właśnie zadanie rozwiązywali. Takie działanie zaskakuje, gdyż studenci wiedzieli, że zadanie pochodzi z programu szkoły podstawowej i mimo tego nie próbowali szukać innych rozwiązań, prostszych, nie wymagających skomplikowanych rachunków, bardziej dostępnych dla ucznia. Uzyskane przeze mnie wyniki są analogiczne do rezultatów badań H. Pieprzyk i B. Wełny[5].

Oryginalny sposób rozwiązania (nr 6) należy do ucznia. Wskazują na to zresztą sformułowania użyte w argumentacji „rozwiązania". W zapisie słowa „rozwiązanie" celowo użyłam cudzysłowu, gdyż sposób ten może wzbudzać kontrowersje w jego ocenie. Właśnie to rozwiązanie miało ocenić stopniem, motywując je słownie, 18 studentów. 7 postawiło ocenę mierną, uzasadniając, że „to nie jest rozwiązanie, bo nie ma rachunków", dwóch – dostateczną, czterech – dobrą z uwagą: „lepiej byłoby zadanie rozwiązać, niż opisywać",

5 H. Pieprzyk, B. Wełna: *Kompetencje absolwenta studiów nauczycielskich w zakresie matematyki szkolnej*. W: *Unowocześnienie procesu...*, s. 135.

czterech – bardzo dobrą, „za pomysł", jeden ze studentów – celującą, za „genialność". Owa „genialność"może być dyskusyjna, gdyż uczeń mógł wcześniej rozwiązywać zadania tego typu i metodę tę po prostu dobrze zapamiętać. Jednak w jego pracy były próby rozwiązywania zadania innymi sposobami wyrażone bądź to rysunkami, bądź różnymi obliczeniami. Uczeń ten wyraził więc otwartą postawę wobec problemu, wykazał pomysłowość i oryginalność w myśleniu. Może właśnie tego nauczył się w szkole?

Nie sposób pominąć milczeniem faktu, iż wszyscy uczniowie podejmowali próby rozwikłania zadania, wykonywali różne rysunki, jak gdyby chcieli znaleźć podpowiedź właśnie w ilustracji graficznej. Ci studenci, którzy nie rozwiązali w ogóle zadania, a było ich siedmiu, ograniczyli się do wykonania jednego rysunku (najbardziej typowego) i zapisania danych.

Uzyskane i przykładowo przedstawione przeze mnie wyniki badań pokazały, iż rozwiązywanie zadań przez studentów cechują: niedokładność lub wręcz brak analizowania problemu, bezkrytyczne podejście do podejmowanych rozwiązań, nawet nie – wybieranie a zadowalanie się rachunkowymi drogami rozwiązania, brak wyobraźni, schematyzm myślowy, brak uzasadniania przyjmowanego sposobu rozwiązania, brak konstruowania ciekawych własnych pomysłów. Znalazły zatem potwierdzenie postawione przeze mnie hipotezy.

Staje się to bardziej widoczne, gdy porównuje się wyniki studentów i uczniów. Nabiera to także szczególnego znaczenia, gdy uzmysłowimy sobie, że ci, którzy sami nie są oryginalni, wnikliwi, nawet dobrzy merytorycznie, mają tego uczyć. Jak można uczyć odejścia od schematów myślowych, zmyślności czy pomysłowości, jeśli, jak np. w zadaniu o trapezie, ocenia się ją nisko?

Podjęte przeze mnie badania chciałabym traktować jako swego rodzaju działalność diagnostyczną. Jej celem byłoby formułowanie indywidualnych programów studiów matematycznych. Proponuję, by w programie kształcenia przyszłych nauczycieli matematyki wziąć pod uwagę posiadaną przez studentów wiedzę matematyczną z zakresu szkoły podstawowej, by docenić znaczenie twórczej postawy wobec matematycznych problemów, sposób oceniania rozwiązań tychże problemów (np. jak oceniać rozwiązanie schematyczne, a jak pomysłowe, co zrobić, gdy dobry jest tok myślenia, ale są błędy rachunkowe), rozumienie tzw. elegancji matematycznej, posiadanie „wyrobienia matematycznego", posługiwanie się na co dzień językiem matematycznym. Wszystko to stanowi dla mnie swego rodzaju świadomość matematyczną przyszłego nauczyciela. Sądzę, że dalsze badania warto byłoby skupić na dwóch elementach tejże świadomości, a mianowicie na rozumieniu funkcjonowania pojęć matematycznych oraz na ocenianiu pracy ucznia w zakresie matematyki.

Zestaw zadań:

1. Na ile części można podzielić 12-centymetrowy odcinek trzema punktami?
2. Rozwiąż jak najkrócej równania i nierówności:
   a) $(x^2 + 1) = -5$
   b) $(5 - x)^2 - (x - 5)^2 < 1$
   c) $\dfrac{[(3 - \frac{4}{7} 5^{-2})^0]^3}{\sqrt{x^2}} \leq 0$
3. W trapezie równoramiennym wysokość ma długość 14 centymetrów, a jego przekątne przecinają się pod kątem prostym i dzielą się w stosunku 2 : 5. Oblicz pole trapezu.
4. Ułóż treść zadania tak, aby układ miał tylko jedno rozwiązanie:
   $\begin{cases} x+y=6 \\ y>2x \end{cases}$

5. Kasia chce upiec ciasto, do którego musi odważyć 15 dkg cukru. W jaki sposób może to zrobić mając 1 kilogram cukru, odważnik 10 dkg i wagę szalkową?
6. Uczeń klasy VIIIa powiedział, że wszyscy uczniowie tej klasy kłamią. Czy mówił prawdę, czy też kłamał? Uzasadnij swą odpowiedź.
7. Skonstruuj trójkąt ABC, mając dane odcinki $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, wiedząc, że $\overline{AD} < \overline{AB}$ i $\overline{BE} < \overline{AB}$ oraz $\overline{AB}$ to bok trójkąta, zaś $\overline{AD}$ i $\overline{BE}$ wysokości tego trójkąta. Opisz konstrukcję.
8. Znajdź długość boku trójkąta równobocznego wiedząc, że różnica długości jego boku i jego wysokości jest równa m. Skonstruuj ten trójkąt. Opisz konstrukcję.

Literatura:

Krygowska Z.: *Zarys dydaktyki matematyki.* Warszawa 1980, WSiP.

Unowocześnienie procesu dydaktycznego. Model dydaktyk szczegółowych, red. B. Niemierko, Bydgoszcz 1989, WSP.

Anna Malenda

Solving mathematical problems by elementary school students and by students of mathematics

The purpose of the study was to recognize the mathematics students proficiency in solving elementary-school mathematical problems and their ability to apply some problem-solving heuristics.

153 elementary school graduates and 80 mathematics students were tested with eight problems requiring creative application of elementary school mathematics. Although mathematics students appeared much more successful in solving the problems, they usually did not try to find simple and original, „elegant" solutions and to make use of their mathematical invention. Instead, they tended to apply schematically advanced mathematical theory.

The study concludes by emphasizing the need for training the prospective mathematics teachers in problem solving heuristics and formative evaluation of creative solutions given by elementary school students to non-standard mathematical problems.