

Krystyna Wojciechowska
Centrum Edukacji Nauczycieli
w Gdańsku

Poziomy rozumienia wybranych problemów matematyki elementarnej

Każdego roku wiele dzieci w naszych szkołach doznaje niepowodzeń w uczeniu się matematyki. Nauczyciele i badacze tego zagadnienia są zgodni w stwierdzeniu, iż źródłem niepowodzeń jest niezrozumienie tego, z czym uczeń obcuje na lekcjach.

Czym więc jest rozumienie

Psychologia nie rozwiązała jeszcze tego zagadnienia w sposób jednoznaczny. Dla Dawida (inicjatora badań nad rozumieniem w psychologii polskiej) jest ono „aktem psychicznym”, dla Szewczuka „aktualizacją uprzedniego poznania” oraz „jednym z procesów myślenia”, dla Pietera rozumienie jest „poznawaniem” i „formą myślenia mniej aktywnego niż myślenie problemowe”, dla Kreutza stanowi ono „właściwość przedstawień, jakie powstają w umyśle ludzkim pod wpływem bodźców zewnętrznych” (zob. J.W. Dawid 1927; W. Szewczuk 1968; J. Pieter 1963; M. Kreutz 1968).

Próba wyróżnienia poziomów rozumienia matematyki elementarnej

Swoistością rozumienia matematyki zajmowała się Danuta Gierulanka. Uważa ona, iż rozumienie to „poznawcze ujmowanie czegoś w sposób istotnie

pośredni. Rozgrywa się ono, gdy (1) jest nam bezpośrednio dane coś takiego, co nas wyprowadza poznawczo poza siebie samo, wskazuje na coś innego, odnosi się doń, czy je sugeruje lub każe się poprzez siebie jeszcze czegoś doszukiwać, i gdy (2) idąc za tymi wskazaniem czy sugestiami, odkrywamy coś nowego w stosunku do tego, co było *explicite* bezpośrednio dane” (D. Gierulanka 1962). Przytoczona definicja sugeruje dwie różne jakościowo kategorie rozumienia:

1. sposób odbioru informacji,
2. operowanie informacją, czyli rozumienie twórcze.

W matematyce tworzywem, z którego zbudowano rzeczywistość daną do zrozumienia są: symbol matematyczny, schemat i słowo. Odbiorca ma uchwycić znaczenie tych znaków, dotrzeć poznawczo do czegoś różnego od tego, co jest jasno i bezpośrednio dane. Można także pójść dalej – przekształcić podaną informację, operować własnościami, czy sprowadzić informacje niepełne do znanej postaci. Jest to nie tylko wyjście poza to, co dane przez wyjaśnienie, ale odkrycie czegoś przez wnioskowanie.

Tabela 1 ujmuje tak pojęte kategorie rozumienia. Uszczegółowieniem tych kategorii są podkategorie nazwane poziomami rozumienia.

Tabela 1

Poziomy rozumienia matematyki elementarnej

Kategoria	Podkategoria (poziom rozumienia)
I Odbiór informacji	1. Odczytywanie znaczeń 2. Rozumienie istoty
II Rozumienie twórcze	3. Wnioskowanie przyczynowo-skutkowe 4. Weryfikacja hipotez

Zakłada się, że każdy wyższy poziom rozumienia wymaga zachowań bardziej złożonych i abstrakcyjnych niż te, które reprezentowane są na poziomie niższym.

Jakie zachowania przyporządkujemy poszczególnym poziomom rozumienia?

ODCZYTYWANIE ZNACZEŃ to najniższy, pierwszy poziom rozumienia matematyki elementarnej. Czynności ucznia charakteryzuje lokalizowanie informacji, odróżnianie tego, co odpowiada danej nazwie, od tego, co nie wchodzi

w jej zakres. Jest to kontynuacja spostrzegania, a nie samo spostrzeganie. Zakres materiału ograniczony jest do tego, co niezbędne, bez czego uczeń na pewno nie poradzi sobie w świadomym stosowaniu wiadomości nawet na najniższym poziomie. Sytuacje, które uczeń spotyka, nie są dla niego nowe.

ROZUMIENIE ISTOTY, sensu treści matematycznych przedstawionych symbolicznie, graficznie bądź na konkretach – to drugi poziom rozumienia matematyki elementarnej. Oznacza to ogólny wgląd w treści, uchwycenie głównych myśli ważnych dla najistotniejszych zastosowań matematyki w sytuacjach typowych. Będzie to nie tylko wyróżnienie desygnatów pojęcia, lecz także przegrupowania i uporządkowania w ramach danych, wyjaśnienie sensu na podstawie charakterystycznych właściwości i najistotniejszych relacji. Czynności ucznia dotyczą treści podstawowej, ściśle powiązanej z dalszym kształceniem matematycznym i najczęstszymi sytuacjami życia codziennego.

ROZUMIENIE PRZYCZYNOWO-SKUTKOWE jest warunkiem koniecznym rozumienia twórczego. W czynnościach tego poziomu nie chodzi jedynie o wyjaśnienie istoty tego, co dane. Chodzi o coś więcej, o skierowanie myśli na relację między dwoma faktami matematycznymi, o wyjaśnienie przyczyny lub skutku, o odśrobnienie nadrzędności i podrzędności, o swobodę w przechodzeniu z przedstawień enaktywnych na ikonizne i graficzne. Do podania właściwej odpowiedzi konieczne jest odkrycie czegoś nowego przez operowanie danymi nietypowymi. Dużą rolę odgrywa znalezienie przyczyny tego nietypowego ujęcia.

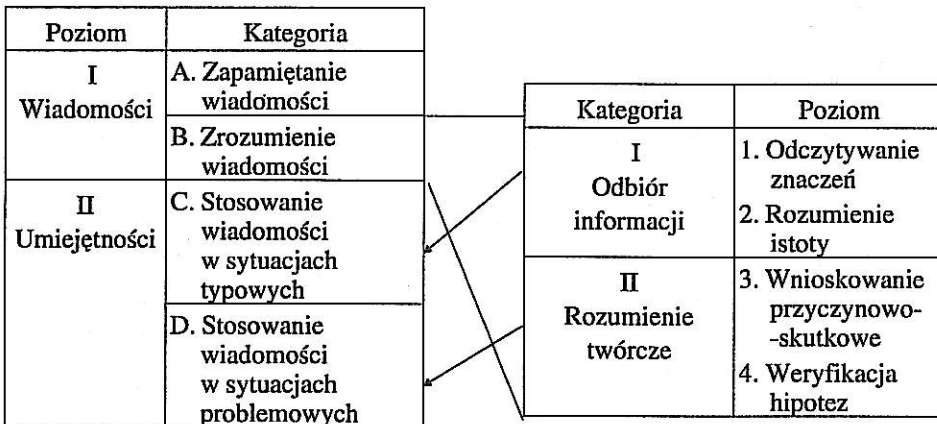
WERYFIKACJA HIPOTEZ to najwyższy, czwarty poziom rozumienia matematyki elementarnej. Dane jest coś, co jedynie sugeruje ogólny typ relacji, ogólny kontekst. Mogą to być fakty matematyczne fragmentaryczne, niepełne, nie dokończone albo celowo błędnie skonstruowane. Weryfikacja przewidywań wymaga posługiwania się wiedzą uogólnioną, klasą przedmiotów, a jednocześnie zauważenia właściwości szczegółowych i warunków granicznych. Operatywne posługiwanie się wiedzą uogólnioną, przekształcanie danych i sprawdzanie ich do postaci znanej (poprawnej), wnioskowanie z faktów niepełnych, to głębsze rozumienie matematyki niż odszukanie przyczyny lub skutku. Takie rozumienie może być podstawą stosowania wiadomości w sytuacjach problemowych.

Taksonomia celów poznawczych a poziomy rozumienia matematyki elementarnej

Relacje między taksonomią celów kształcenia (B. Niemierko 1975), w tym taksonomii celów nauczania początkowego matematyki (K. Wojciechowska 1984), przedstawia poniższy schemat:

Taksonomia celów nauczania

Poziomy rozumienia matematyki elementarnej



—————> oznacza gotowość świadomego stosowania wiadomości

Rys. 1. Zależności między taksonomią celów poznawczych a poziomami rozumienia matematyki elementarnej

Pierwsza kategoria rozumienia (poziom 1 i 2) to skierowanie myśli na sens, intencję, istotę tego, co dane. Czynności dotyczą uprzednich doświadczeń i ich aktualizacji. Chodzi o włączenie tego, co dane do tego, co gotowe. Opis głównych zależności, trafne łączenie informacji podanych wprost, lokalizowanie informacji – związane są ze sposobem odbioru informacji i stanowią gotowość do świadomego stosowania wiadomości w sytuacjach typowych.

Druga kategoria rozumienia – rozumienie twórcze – stanowi gotowość do stosowania wiadomości w sytuacjach problemowych. Jest ono bardziej dynamiczne niż rozumienie na poziomie odbioru informacji. Czynności ucznia związane są z operowaniem tym, co dane, poprzez ustalenie przyczyny albo skutku, odszukanie informacji brakującej bądź jej naprawienie, czyli doprowadzenie do sytuacji prawdziwej, a także uchwycenie nadrzędności i podrzędności.

Takie myślenie o poziomach rozumienia matematyki elementarnej burzy pełną hierarchiczność taksonomii celów nauczania (por. K. Wojciechowska 1984).

Jak zebrano wyniki badań?

Wyróżnione poziomy rozumienia matematyki elementarnej wymagały empirycznego sprawdzenia ich hierarchiczności. Podstawowe problemy badawcze sformułowano w pytaniach:

1. Jakie testy można konstruować do badania rozumienia matematyki elementarnej?
2. W jakiej mierze poziom rozumienia matematyki elementarnej jest uwarunkowany środowiskiem szkolnym?
3. Czy wybór odpowiedzi w zadaniach zamkniętych może świadczyć o rodzaju popełnianego błędu?

Głównym założeniem było badanie rozumienia jako efektu, tzn. sprawdzenie, czy w świadomości dziecka występuje pewna myśl, z której potrafi ono zdać sprawę (por. Szewczuk 1968). Wskaźnikiem tej myśli, tego zdawania sprawy było podkreślenie odpowiedzi, połączenie w pary, dorysowanie elementu, uzupełnienie rysunku bądź poprawienie go, a nie obliczenia rachunkowe czy podanie faktu matematycznego.

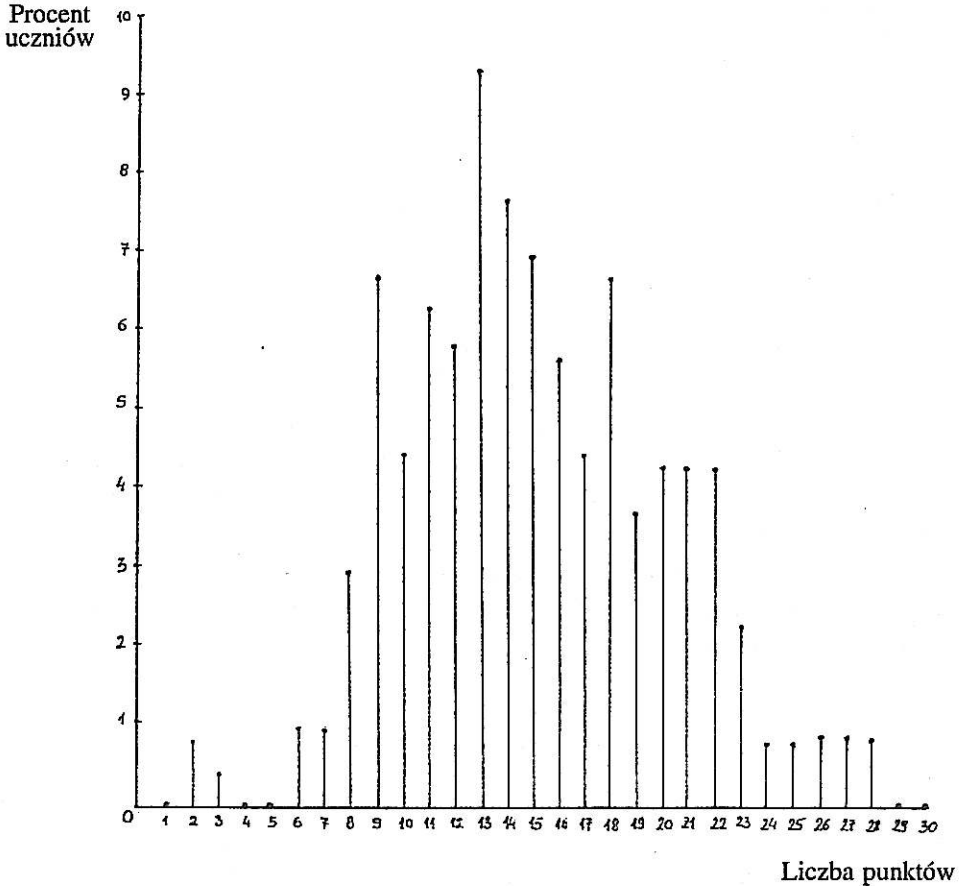
Badaniami objęto 254 uczniów klasy trzeciej szkoły podstawowej województwa gdańskiego. Użyto próby warstwowo-losowej z *Międzynarodowych Badań Umiejętności Czytania* (1992). Zależności środowiskowe ujęła zróżnicowana populacja: wielkomiejska, małomiejska i wiejska. Narzędziem badań był test.

Wyniki badań

Skonstruowany test badał rozumienie trzydziestu czynności: 12 dotyczyło porównywania, podporządkowania i klasyfikacji, 6 – własności działań, 5 – zadań tekstowych, 4 – osi liczbowej i 3 – równania. Natomiast co do poziomu rozumienia liczby badanych czynności przedstawiają się następująco:

- poziom pierwszy – 4 czynności, poziom drugi – 7 czynności,
- poziom trzeci – 9 czynności i poziom czwarty – 10 czynności.

Za każdą poprawnie wykonaną czynność uczeń otrzymywał jeden punkt, stąd maksymalna liczba punktów jest równa 30. Procentowy rozkład wyników testowania przedstawia rysunek 2.



Rys. 2. Rozkład wyników testowania

Rozpiętość wyników jest bardzo duża, zajmuje prawie całą skalę: od 2 do 28 punktów. Średni wynik testowania wynosi 15 punktów, modalna 13, a mediana także 15 punktów. Ponad 80% wyników gromadzi się w przedziale od 9 do 22 punktów.

Sposób zamiany liczby uzyskanych punktów na zaliczenie danego poziomu rozumienia oparto na teorii pomiaru sprawdzającego wielostopniowego (Niemierko 1990). Stąd przyjęto, iż: 1) bez zaliczenia poziomu niższego nie można zaliczyć poziomu wyższego, 2) aby zaliczyć dany poziom wymagań, należy rozwiązać poprawnie co najmniej 70% zadań z tego poziomu. Układ poziomów wymagań i odpowiadające im liczby punktów przedstawia tabela 2.

Tabela 2

Normy wymagań a poziomy rozumienia

Poziom rozumienia	I	II	III	IV
Maksymalna liczba punktów	4	7	9	10
Norma wymagań (w punktach)	3	5	6	7
Zaliczenie poziomu (w punktach)	3 punkty			
	3 punktów			
	14 punktów			
	21 punktów			

W przypadkach niestopniowalnych na zaliczenie poziomu niższego gromadzono punkty z poziomów wyższych, nigdy odwrotnie.

Najlepiej poradzili sobie uczniowie z zadaniami poziomu pierwszego (87% wykonania). Tego poziomu nie zaliczyło jedynie dwóch uczniów legitymujących się zaświadczeniem o obniżeniu wobec nich wymagań programowych. Poziom drugi zaliczyło 94% uczniów. Uzyskali oni od 8 do 13 punktów. Z tego poziomu średnio wykonano 63% zadań (por. tabela 3). Oznacza to, iż z tego poziomu nie wykonano prawidłowo co trzeciego zadania, a poziomu tego nie zaliczył co osiemnasty uczeń.

Tabela 3

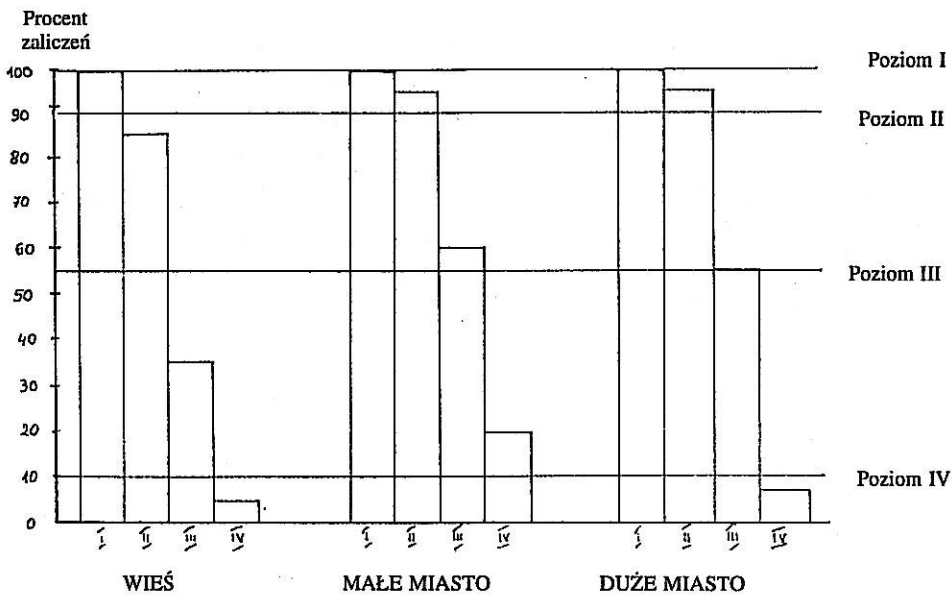
Wyniki w poziomach rozumienia

Poziom rozumienia	I	II	III	IV
Procent zaliczeń	99	94	54	11
Łatwość grupy zadań	0,87	0,63	0,45	0,22

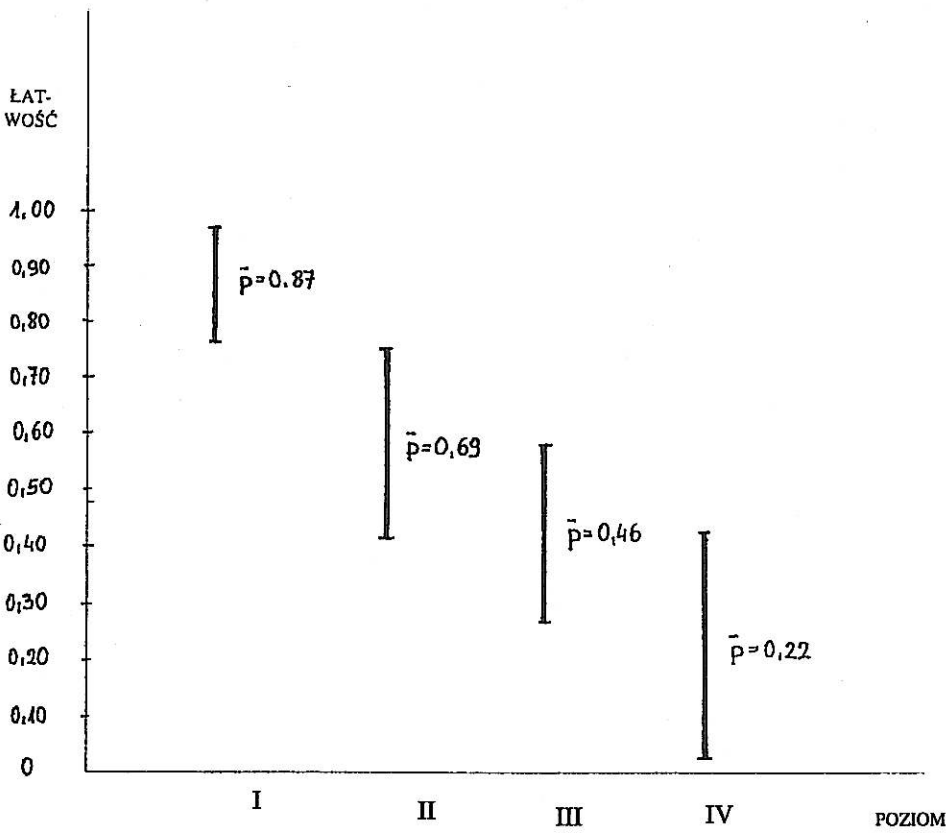
Znacznie więcej trudności sprawiły uczniom zadania dotyczące rozumienia twórczego. Poziom trzeci zaliczyło nieco ponad połowę uczniów (54%), a poziom czwarty co dziewięć uczeń (11%). W poziomie trzecim średnio uczniowie wykonali 46% zadań, a z poziomu czwartego 22% zadań (tabela 3).

Zebrane w tabeli 3 wyniki zilustrowano rysunkiem trzecim i czwartym.

Na rysunku 3 słupki pionowe pokazują, ile procent uczniów w poszczególnych warstwach zaliczyło dany poziom rozumienia. Widzimy tu różnice uwarunkowane środowiskiem szkolnym. Najniższe wyniki osiągają dzieci wiejskie, a najwyższe – dzieci z mniejszych miast. W każdym środowisku widać różnice w procentach zaliczeń poziomów rozumienia. Także średni poziom zaliczeń poziomów wymagań (linie poziome) pokazuje hierarchiczne uporządkowanie wyodrębnionych poziomów rozumienia matematyki elementarnej.



Rys. 3. Procent zaliczeń w poziomach rozumienia



Rys. 4. Łatwość zadań według poziomów rozumienia

Rozrzut łatwości zadań w poszczególnych poziomach rozumienia oraz średnia łatwość grupy zadań (tab. 3 i rys. 4) ukazują hierarchiczne uporządkowanie wyników uzyskanych za pomocą testu wielopoziomowego. Większość zadań z najniższego poziomu to zadania bardzo łatwe ($p > 0,8$). W poziomie drugim współczynnik łatwości pięciu na siedem zadań mieścił się w przedziale od 0,60 do 0,75, co oznacza, iż są to zadania łatwe. Natomiast w grupie zadań z zakresu rozumienia twórczego (poziom rozumienia trzeci i czwarty) większość zadań to zadania trudne i bardzo trudne.

Wnioski

1. Aby nauczanie szkolne matematyki elementarnej było bardziej operatywne, należy większą uwagę zwrócić na rozumienie tego, z czym dziecko obcuje na lekcjach. Jakość rozumienia jest ściśle powiązana z poziomami rozumienia. Ważną wskazówką do wyodrębnienia tych poziomów są badania psychologiczne.

2. Test wielostopniowy jest trafnym narzędziem rozpoznającym poziom rozumienia matematyki elementarnej. Potwierdzeniem tej tezy są wyniki zaliczeń poziomów rozumienia oraz wskaźniki łatwości zadań w poszczególnych poziomach, a także łatwość grup zadań. Do badań wyodrębniono próbę warstwowo-losową uczniów klas trzecich województwa gdańskiego.

3. Wskaźnikiem rozumienia nie jest podanie faktu czy dokonanie skomplikowanego obliczenia, lecz podkreślenie, połączenie, uzupełnienie faktów bądź poprawienie danych tak, aby otrzymać odpowiedź prawidłową.

4. Testem objęto fakty matematyczne podane w postaci grafu, symbolu i słowa. Zadania konstruowano tak, by odpowiedź nieprawidłowa sugerowała rodzaj popełnionego błędu.

5. Wyniki badań są przydatne do oceny opisowej, indywidualizacji nauczania, likwidowania braków wiedzy ucznia, śledzenia rozwoju ucznia, a także – w przypadku wysokich osiągnięć – do rozszerzenia podstawy programowej w kierunku głębszego rozumienia matematyki. Osiągnięcia uczniów ustalone na podstawie testu nie są wystarczające do orzekania o rozumieniu matematyki w ogóle i nie mogą być jedyną podstawą do wystawienia oceny semestralnej.

Literatura

- ABC testów osiągnięć szkolnych, red. B. Niemierko, WSiP, Warszawa 1975
- Dawid J.W., *Inteligencja, wola i zdolność do pracy*, Zakład Narodowy im. Ossolińskich, Wrocław 1966
- Gierulanka D., *Zagadnienie swoistości poznania matematycznego*, PWN, Warszawa 1962
- Kreutz M., *Rozumienie testów. Badania psychologiczne*, PWN, Warszawa 1968
- Niemierko B., *Pomiar sprawdzający w dydaktyce*, PWN, Warszawa 1990
- Pieter J., *Słownik psychologiczny*, Zakład Narodowy im. Ossolińskich, Wrocław 1963
- Szewczuk W., *Proces rozumienia*, w: *Psychologia rozumienia*, red. W. Szewczuk, PWN, Warszawa 1968
- Wojciechowska K., *Próba konstrukcji i wykorzystania taksonomii celów nauczania początkowego matematyki*, „Edukacja” 1984, nr 2
- Wojciechowska K., *Zastosowanie taksonomii celów nauczania początkowego matematyki do interpretacji programu nauczania*, w: *Diagnostyka edukacyjna*, red. B. Niemierko, UG, Gdańsk 1994

Załącznik

PRZYKŁADY ZADAŃ Z POSZCZEGÓLNYCH POZIOMÓW ROZUMIENIA

p – łatwość zadania

Poziom 1

Odróżnienie prawidłowo porównanych działań z liczbami od porównań nieprawidłowych.

Zadanie 1

Napisz TAK albo NIE bez wykonywania obliczeń.

Czy to prawda, że:

- | | | |
|--------------------------------|-----------------|----------|
| a) $5 < 8$ | Odpowiedź:..... | p = 0,96 |
| b) $8 + 175 = 8 + 275$ | Odpowiedź:..... | p = 0,89 |
| c) $128 \cdot 6 > 128 \cdot 5$ | Odpowiedź:..... | p = 0,83 |

Poziom 2

Odszukanie liczb uporządkowanych według podanego polecenia.

Zadanie 1

p = 0,59

Podkreśl liczby uporządkowane od najmniejszej do największej.

- a) 0, 1, 5, 2
- b) 2, 15, 79, 80
- c) 4, 3, 2, 1
- d) 7, 800, 193, 1000

Odróżnienie danych istotnych w zadaniu tekstowym od danych zbytecznych.

Zadanie 2

$p = 0,42$

Henio ma 6 samochodzików, a Tomek 5. Dwa samochodziki Henia i 3 Tomka są w kolorze czerwonym. Ile samochodzików mają chłopcy razem?

Podkreśl rozwiązanie tego zadania.

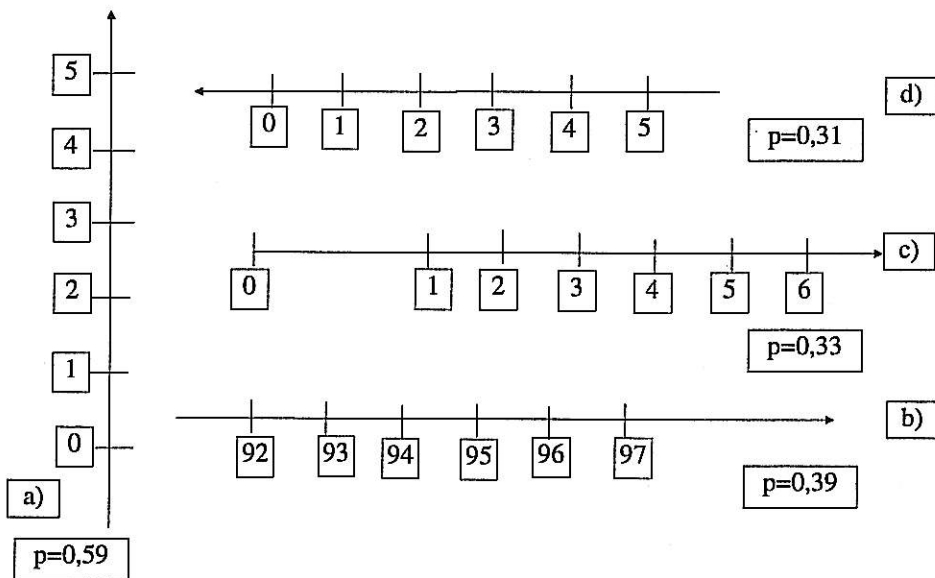
- a) $6 + 5 + 2 + 3 = 16$
- b) $6 + 5 + 3 = 14$
- c) $6 + 5 = 11$
- d) $6 + 3 = 9$

Poziom III i IV

- a) Wyodrębnienie osi liczbowej w nietypowym położeniu (poziom III).
- b) Ocena poprawności nietypowej osi liczbowej (poziom IV).
- c,d) Naprawienie informacji fałszywej tak, by otrzymać oś liczbową (poziom IV).

Zadanie 1

Otocz pętlą rysunki, na których prawidłowo narysowano oś liczbową. Pozostałe rysunki popraw tak, by przedstawiały oś liczbową.



a) Przyporządkowanie zadaniu tekstowemu złożonemu odpowiedniego schematu (poziom III).

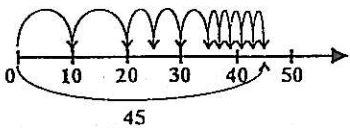
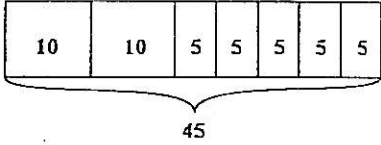
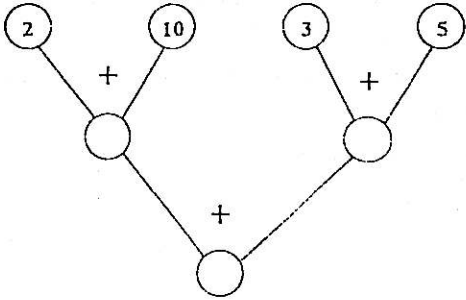
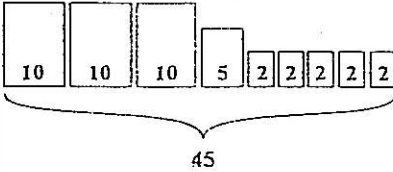
b) Dostosowanie schematu do treści zadania tekstowego złożonego (poziom IV).

Zadanie 2

Hurtownia ma wysłać 45 kg słodyczy. Wysłano już 2 paczki po 10 kg i 3 paczki po 5 kg. Pozostałą część należy wysłać w paczkach dwukilogramowych. Ile będzie paczek dwukilogramowych?

Otocz pętlą rysunek przedstawiający treść tego zadania.

Jeden z pozostałych rysunków popraw tak, aby także przedstawiał treść tego zadania.

 <p>A number line from 0 to 50 with tick marks every 10 units. A bracket under the line from 0 to 45 is labeled '45'. There are two large curved arrows starting at 0 and ending at 10 and 20. There are three medium curved arrows starting at 20 and ending at 25, 30, and 35. There are five small curved arrows starting at 35 and ending at 40, 41, 42, 43, and 44.</p>	 <p>A horizontal bar divided into six equal segments. The first two segments are labeled '10' and the next four segments are labeled '5'. A bracket underneath the entire bar is labeled '45'.</p>
 <p>A tree diagram with three levels. The top level has four circles containing the numbers 2, 10, 3, and 5. The first two circles (2 and 10) are connected by a line to a central circle below them, with a '+' sign between them. The last two circles (3 and 5) are connected by a line to another central circle below them, with a '+' sign between them. These two central circles are then connected by a line to a final central circle at the bottom, with a '+' sign between them.</p>	 <p>A horizontal bar divided into ten equal segments. The first three segments are labeled '10', the fourth segment is labeled '5', and the last five segments are labeled '2'. A bracket underneath the entire bar is labeled '45'.</p>

a/ p=0,30

b/ p=0,11